



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica

JULIO CESAR VALENCIA GUEVARA

TEORIA DE FLUXOS GRADIENTES PARA UM MODELO  
UNIDIMENSIONAL PERIÓDICO NÃO LOCAL E PARA  
FUNCIONAIS DEPENDENTES DO TEMPO

CAMPINAS

2016

JULIO CESAR VALENCIA GUEVARA

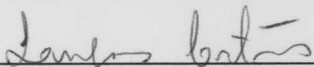
TEORIA DE FLUXOS GRADIENTES PARA UM MODELO  
UNIDIMENSIONAL PERIÓDICO NÃO LOCAL E PARA  
FUNCIONAIS DEPENDENTES DO TEMPO

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

**Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO JULIO CESAR  
VALENCIA GUEVARA, E ORIENTADA PELO PROF.  
DR. LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA.

**Assinatura do Orientador**

  
\_\_\_\_\_

CAMPINAS  
2016

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CNPq, 140674/2014-4; CAPES

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

V234t      Valencia Guevara, Julio Cesar, 1985-  
Teoria de fluxos gradientes para um modelo unidimensional periódico não local e para funcionais dependentes do tempo / Julio Cesar Valencia Guevara. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Fluxo gradiente. 2. Transporte ótimo. 3. Soluções periódicas (Equações diferenciais). 4. Comportamento assintótico de soluções. 5. Teoria do funcional de densidade dependente do tempo. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Gradient flows to a periodic non-local one dimensional model and to time dependent functionals

**Palavras-chave em inglês:**

Gradient flow

Optimal transport

Periodic solutions (Differential equations)

Asymptotic behavior of solutions

Time-dependent density functional theory

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Doutor em Matemática

**Banca examinadora:**

Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]

Juliana Conceição Precioso Pereira

Adilson Eduardo Presoto

Ademir Pastor Ferreira

Eduardo Cardoso de Abreu

**Data de defesa:** 17-02-2016

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 17 de fevereiro de 2016 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA**

**Prof(a). Dr(a). JULIANA CONCEIÇÃO PRECIOSO PEREIRA**

**Prof(a). Dr(a). ADILSON EDUARDO PRESOTO**

**Prof(a). Dr(a). ADEMIR PASTOR FERREIRA**

**Prof(a). Dr(a). EDUARDO CARDOSO DE ABREU**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Para minha família...*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde e a vida de cada dia sem o qual não teria sido possível a conclusão deste trabalho de tese. Agradeço especialmente também ao meu orientador, o Professor Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira pela grande confiança depositada, pelas inúmeras sugestões e discussões que muito me ajudaram e os conselhos não somente acadêmicos, assim como pela ajuda com a redação, corrigindo, naturalmente por não ser português falante, erros que dificultariam o bom entendimento do texto.

Um agradecimento especial para as agências Capes e CNPq pelo financiamento econômico que me permitiu desenvolver sem maiores inconvenientes o trabalho durante todo o doutorado.

Agradeço a minha família especialmente a minha esposa Daphne pelo apoio sempre incondicional, meus filhos Fabian e Livia pelas alegrias e momentos de sossego, a minha mãe Justina pela educação e exemplo ao longo de toda a minha vida, meus irmãos Rodrigo, Kathy, Marianela, Elvira, Fernando por ser quem são. Ao meu pai Marcos pela perseverança. Aos meus sogros pelos inúmeros conselhos ao longo destes anos e especialmente a minha sogra Roxana, pela grande ajuda fornecida durante o mestrado e boa parte do doutorado. Sou grato também a todos meus amigos do predinho no Imecc pelos grandes e pequenos momentos compartilhados fazendo da pós-graduação uma jornada mais agradável, especialmente o David e a Claudia. Omitirei o resto dos nomes por não errar de esquecer algum deles que são muito importantes.

Finalmente agradeço a toda comunidade acadêmica e administrativa do Imecc pelo acolhimento e conhecimento transmitido neste tempo todo.

## Resumo

Neste trabalho de tese são abordados três temas relacionados com a teoria de transporte ótimo de massa e a teoria métrica de fluxos gradientes. A saber, inicialmente estudamos um modelo unidimensional vindo da mecânica dos fluidos, o qual é um análogo unidimensional da equação quase-geostrófica. Analisamos a boa colocação deste modelo no espaço de Wasserstein das medidas periódicas,  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , munido com a métrica de Wasserstein que vem da teoria de transporte ótimo de massa. Obtemos também propriedades qualitativas tais como comportamento assintótico, regularidade e estabilidade de soluções em relação ao parâmetro da viscosidade. Depois, estudamos a boa colocação, em espaços métricos gerais, da equação de fluxo gradiente dependendo do tempo, isto é, a equação diferencial ordinária cujo campo de velocidades é dado por menos o gradiente, em relação à variável espacial, de um funcional que depende do tempo. Para tal sistema, damos condições ao funcional que garantem a boa colocação e permitem obter propriedades como uma identidade de energia e comportamento assintótico. Aplicamos a teoria métrica desenvolvida para o caso do espaço de Wasserstein Euclidiano clássico  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  munido com a métrica de Wasserstein. Os funcionais destas aplicações são essencialmente a soma dos funcionais de energia potencial, um funcional de energia interna (dada pelo funcional de entropia com coeficiente de difusão variável) e o funcional de energia de interação. Finalmente, adaptamos a teoria métrica para funcionais de energia interna mais gerais.

**Palavras-chave:** Fluxo gradiente, Transporte Ótimo, Soluções Periódicas, Comportamento assintótico, Funcionais dependentes do tempo.

## Abstract

In this thesis work, we study three topics related to optimal mass transport theory and the metric theory of gradient flows. Namely, the first one is the analysis of an one-dimensional model arising in fluid mechanics. This model is an one-dimensional analogous of the quasi-geostrophic equation. We analyze well posedness of this model in the Wasserstein space of periodic probability measures, denoted by  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , endowed with the Wasserstein metric defined in an optimal transportation framework. Also, we study qualitative properties of solutions of that model such as asymptotic behavior, regularity and stability with respect to the viscosity. The second topic is the study of time-dependent gradient flow in a metric setting, that is, ordinary differential equations whose velocity field are given by minus the spatial gradient of time-dependent functional. For this, we give conditions in the functional that ensure the well-posedness and allow to get qualitative properties such as the energy identity and asymptotic behavior. We give applications of this theory to functionals defined in the Euclidean Wasserstein space  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  endowed with the Wasserstein metric. In the applications, the functionals dealt with are precisely the sum of the time-dependent potential energy, the internal energy (which is the Boltzman entropy energy with time-dependent diffusion coefficient) and the time-dependent interaction energy. Finally, we adapt the metric theory for a more general time-dependent energy functional.

**Keywords:** Gradient Flow, Optimal Transport, Periodic Solutions, Asymptotic behavior, Time-dependent functionals



# Sumário

<b>Dedicatória</b>	<b>5</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>6</b>
<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>18</b>
1.1 Teoria métrica de fluxos gradientes . . . . .	18
1.2 Teoria de transporte . . . . .	23
1.3 Funcionais clássicos . . . . .	26
<b>2 Modelo Unidimensional Periódico</b>	<b>30</b>
2.1 Teoria de transporte no círculo . . . . .	30
2.2 Formulação como fluxo gradiente e funcionais periódicos . . . . .	32
2.3 Domínio dos funcionais . . . . .	35
2.4 Semicontinuidade dos funcionais . . . . .	37
2.5 Existência de minimizadores . . . . .	39
2.6 Convexidade dos funcionais . . . . .	40
2.7 Boa colocação e limite invíscido . . . . .	42
2.8 Soluções no sentido distribucional . . . . .	47
2.9 Aplicações . . . . .	54
<b>3 Fluxo Gradiente Dependendo do Tempo</b>	<b>56</b>
3.1 Formulação Métrica . . . . .	56
3.2 Esquema Variacional Implícito . . . . .	58
3.3 Construção e Propriedades do Esquema Implícito . . . . .	59
3.4 Estimativas a priori vindas da convexidade . . . . .	65
3.5 Convergência da Solução Aproximada . . . . .	70
3.6 Regularidade . . . . .	75
3.7 Uma propriedade de contração . . . . .	81

<b>4</b>	<b>Aplicações para o espaço de Wasserstein</b>	<b>83</b>
4.1	Equação de Fokker-Planck com potencial dependendo do tempo . . . . .	84
4.2	Equação de agregação com interação dependendo do tempo . . . . .	90
4.3	Equação de Fokker-Planck com difusão dependendo do tempo . . . . .	93
4.4	Funcionais de energia interna mais gerais . . . . .	99
	<b>Bibliography</b>	<b>107</b>

# Introdução

Neste trabalho de tese são abordados três temas relacionados com a teoria de fluxos gradientes e a teoria de transporte ótimo de massa. Primeiramente, estudamos a versão periódica de um modelo unidimensional que vem da mecânica de fluidos, a saber

$$\partial_t \mu_t + \partial_x (H(\mu_t) \mu_t) = \nu \partial_{xx} \mu_t, \quad (0.0.1)$$

onde

$$H(\mu) = \frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\frac{x-y}{2}\right) \mu(y) dy,$$

denota a transformada de Hilbert periódica e  $\nu \geq 0$  é uma constante chamada de viscosidade. De fato, motivados pela forma geométrica do núcleo da transformada de Hilbert, abordamos o seguinte problema unidimensional

$$\partial_t \mu_t - \partial_x ((\partial_x W * \mu_t) \mu_t) = \nu \partial_{xx} \mu_t, \quad (0.0.2)$$

onde  $W$  representa uma função periódica satisfazendo certas condições que cobrem o caso particular (0.0.1). A boa colocação e propriedades qualitativas do modelo (0.0.2) são obtidos no espaço de Wasserstein periódico  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  cujos elementos são medidas de probabilidade no círculo  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

O modelo (0.0.1) pode ser visto como uma equação de continuidade cujo campo de velocidades depende de maneira não-local da função desconhecida  $\mu_t$  e possui uma forte analogia com alguns modelos que vêm da física. Por exemplo, ele é um análogo unidimensional da equação quase geostrófica 2-dimensional, veja por exemplo [11]. Neste trabalho, os autores mostram que se  $\mu_0$  é uma função periódica de classe  $C^1$  e com média zero, i.e.  $\int_{-\pi}^{\pi} \mu_0(x) dx = 0$ , então não pode existir uma solução em  $C^1([0, \infty) \times [-\pi, \pi])$  para o modelo (0.0.1) com viscosidade  $\nu = 0$ . Este fato, ainda é válido se a média do dado inicial é não negativa e o mínimo dele é negativo. Outra analogia é exibida em [4] na qual o comportamento das soluções de (0.0.1), com  $\nu = 0$ , é comparado com o problema chamado de *vortex sheet*. Este problema, essencialmente, consiste no estudo de dois fluidos separados por uma membrana e cuja dinâmica é governada pelas equações de Euler incompressíveis e de tipo irrotacional. Nesse trabalho, foi estudado (0.0.1) onde, para  $\nu > 0$ , eles construíram uma solução no espaço  $C^\infty([0, T^*) \times \mathbb{S}^1)$  e com norma  $L^\infty$

explodindo no tempo  $T^*$ . Com efeito, eles mostraram que a solução converge no sentido distribucional quando  $t \rightarrow T^*$  para uma medida periódica do tipo

$$a + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_0(x - 2\pi n),$$

onde  $\delta_0$  representa a delta de Dirac concentrada em 0.

Por outro lado, em [10] foi estudada a versão não periódica da equação (0.0.1) com  $\nu = 0$  e dado inicial  $\mu_0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^{0,\delta}$ , onde  $0 < \delta < 1$  e com  $\mu_0 > 0$  se anulando no infinito. Os resultados de [10] mostram a existência de uma única solução global em  $C^1((0, \infty); C^\infty(\mathbb{R}))$ . Também, no mesmo trabalho, é mostrado que para  $\mu_0 \in H^2(\mathbb{R})$  com  $\mu_0 \geq 0$  e  $\nu = 0$ , existe  $T > 0$  tal que o modelo (0.0.1) admite uma única solução no espaço  $C([0, T]; H^2(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$ . Outro indicativo de um comportamento singular para as soluções de (0.0.1) é dado em [22, Lema 3.3] onde para um dado inicial da forma

$$\mu_0 = a_0 + a_1 \cos(x)$$

com  $|a_1| > \nu \geq 0$  e  $a_0 \neq 0$ , soluções com norma  $L^2(\mathbb{S}^1)$  explodindo em tempo finito são construídas. Todos estes fatos expostos indicam que as soluções do modelo (0.0.1) possuem um comportamento singular e que nem sempre podem ser estendidas globalmente no tempo preservando sua regularidade inicial. A versão não periódica do modelo (0.0.1) foi estudada no contexto da teoria de transporte em [7] onde foi obtida a boa colocação global no espaço de Wasserstein  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  assim como propriedades qualitativas e um resultado de estabilidade em relação ao parâmetro da viscosidade.

Passando para o modelo (0.0.2), que generaliza a situação anterior, vemos que ele pode ser interpretado como uma equação de agregação periódica, quando  $\nu = 0$ . Tal equação tem sido estudada em vários contextos na literatura e ele aparece como um modelo em quimiotaxia assim como para descrever a interação de certas populações como rebanhos, enxames de insetos, etc, onde se apresenta um potencial de interação. Em [6] é estudada uma equação de agregação do tipo  $\partial_t \mu + \nabla \cdot (\mu \nabla W * \mu) = 0$  no  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , onde  $W$  é um potencial radial, não negativo e Lipschitz fora da origem. Os autores mostraram que, para algum dado inicial regular, a solução explode em tempo finito. Em [5] é provada a boa colocação global da mesma equação de agregação em dimensão maior do que 1, quando a condição chamada de *Osgood* é satisfeita. Em relação ao modelo (0.0.2), obtemos aqui a boa colocação no espaço de Wasserstein periódico  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , sem quaisquer condições adicionais no dado inicial.

Neste trabalho, para  $\nu = 0$ , notamos que existe um efeito de regularização no sentido de que o potencial  $W$  induz uma repulsão da massa a qual inicialmente pode estar altamente concentrada. Mais ainda, no caso particular (0.0.1) notamos que a solução tende assintoticamente a homogeneizar a massa em um sentido fraco, veja Teorema 2.7.1(v) e

Proposição 2.5.1. Por outro lado, quando o dado inicial é altamente singular, digamos uma delta de Dirac, é possível que o fluxo não se torne imediatamente uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue como mostra a Proposição 2.3.1. A ideia principal para abordar tal modelo no espaço de Wasserstein vem do cálculo formal de Otto (veja [28, capítulo 15]), no qual uma equação de fluxo gradiente admite a representação formal

$$\partial_t \mu_t = \nabla \cdot (\mu_t \nabla \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mu}(\mu_t)), \quad (0.0.3)$$

onde  $\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mu}(\mu_t)$  representa a derivada de um funcional no sentido de  $L^2$ . Tal abordagem foi inicialmente introduzida por Otto no trabalho [17] para a equação de Fokker-Planck e depois formulada de maneira mais rigorosa junto a um cálculo sub-diferencial no livro [3]. Estas ideias tem sido utilizadas para abordar equações gerais do tipo

$$\partial_t \mu_t = \nabla \cdot \{ \mu \nabla c^* [\nabla F'(\mu) + V] \}, \quad (0.0.4)$$

para funcionais na forma

$$\mathcal{E}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} [F(\mu(x)) + \mu(x)V(x)] dx,$$

como feito em [1]. Com respeito à teoria de fluxo gradiente no espaço  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , em [8] foi considerado uma família de funcionais de primeira ordem e com deslocamento convexo dado por

$$\mathcal{E}(\rho) = \int_0^1 \left[ \left( \frac{1}{\rho^\beta} \right) \right]^2 dx, \text{ para } \beta \in [1, 3/2],$$

cujos fluxos gradiente associados são soluções periódicas fracas para uma classe de equações parabólicas de quarta ordem.

Note que não podemos aplicar diretamente a teoria desenvolvida em [3] para o espaço de Wasserstein  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , pois ela está desenvolvida com espaço base sendo um espaço de Hilbert e a estrutura vetorial tem um papel importante. Aqui usamos a teoria métrica de fluxo gradiente desenvolvida na primeira parte da mesma referência e, para ligarmos tal teoria com a equação (0.0.2), adaptamos técnicas e os conceitos lá encontrados. Essencialmente, adotamos a interpretação de  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  como um espaço quociente do espaço  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , analogamente à relação entre o toro e o espaço Euclidiano. Portanto, precisamos de uma certa invariância dos funcionais considerados com respeito à relação de equivalência considerada, veja Lema 2.2.2. Esta interpretação e demais propriedades do espaço  $\mathcal{P}_2(\mathbb{S}^1)$  podem ser encontradas em [16].

Na segunda parte deste trabalho, desenvolvemos uma teoria métrica de fluxos gradientes, na qual consideramos um funcional que admite uma dependência na variável

temporal. Precisamente, consideramos a seguinte equação diferencial ordinária

$$u'(t) = -\nabla \mathcal{E}(t, u(t)), \quad (0.0.5)$$

onde o gradiente é tomado em relação à segunda variável e assumimos que  $\mathcal{E} : [0, \infty) \times X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  com  $X$  sendo um espaço métrico completo e separável. O objetivo é construir uma teoria métrica para a equação (0.0.5) e aplicá-la para obter resultados de boa colocação global e propriedades qualitativas de certas equações diferenciais parciais com coeficientes que admitem dependência da variável temporal  $t$ . De fato, o contexto onde tal teoria será aplicada é no espaço de Wasserstein  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  para os funcionais de *energia interna*, *energia potencial* e *energia de interação* que admitem parâmetros dependentes do tempo. Com respeito à equação (0.0.5), existem abordagens métricas que resolvem equações duplamente não lineares. Com efeito, em [20], [25] e [21], é considerada a equação não linear

$$\nabla \Psi(u'(t)) = -\nabla \mathcal{E}(t, u(t))$$

num contexto métrico, onde  $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa. Tal sistema pode ser reformulado pela desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t, u(t)) \leq \partial_t \mathcal{E}(t, u(t)) - \Psi(u(t)) - \Psi^*(-\nabla \mathcal{E}(t, u(t))),$$

onde  $\Psi^*$  é a função convexa conjugada de  $\Psi$ . Note que (0.0.5) é um caso particular da equação anterior tomando  $\Psi(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ . A abordagem para tal sistema não linear segue da discretização de tal equação, o que tem como consequência o seguinte esquema variacional discreto

$$U^n \in \text{Argmin}_v \{ (t^n - t^{n-1}) \Psi\left(\frac{d(U^{n-1}, v)}{t^n - t^{n-1}}\right) + \mathcal{E}(t^n, v) \}. \quad (0.0.6)$$

Os autores dos trabalhos citados acima estudam a convergência do esquema discreto (0.0.6) assumindo condições tais como

$$|\partial_t \mathcal{E}(t, v)| \leq C(\mathcal{E}(t, v) + d(u, u_0) + 2C_0) > -\infty, \quad \forall t \in [0, T], \quad (0.0.7)$$

para algum  $u_0 \in X$ , onde

$$C_0 = \inf_{t \in [0, T], v \in X} \mathcal{E}(t, v).$$

Aplicações da teoria geral são dadas em espaços de Banach para funcionais que podem ser decompostos como  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ , onde  $\mathcal{E}_1$  é limitado inferiormente e  $\lambda_0$ -convexo uniformemente em  $t$ , e  $\mathcal{E}_2$  é uma perturbação côncava dominada por  $\mathcal{E}_1$ . Para um domínio  $\Omega$  e  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ , eles analisaram a equação

$$u'(t) = \Delta u - F'(u) - l(t),$$

na métrica  $L^1(\Omega)$ .

Contudo, não podemos aplicar a teoria desenvolvida em [20], [25] e [21] desde que ela assuma hipótese de limitação inferior sobre o funcional  $\mathcal{E}$  e os funcionais que são objeto do nosso estudo não possuam em geral essa propriedade. Como consequência deste fato, um tipo de controle como em (0.0.7), na derivada temporal  $\partial_t \mathcal{E}$ , não pode ser imposta. Em vez disto, assumimos uma condição de crescimento quadrático na derivada temporal de  $\mathcal{E}$  em relação à variável espacial. Uma outra diferença é que trabalhamos com uma hipótese de convexidade que depende do tempo. Em essência, permitimos que o nível de convexidade do funcional  $\mathcal{E}$  varie de acordo como o tempo. Esta liberdade possui certas implicações no comportamento assintótico do fluxo gradiente associado, a saber, estamos falando da propriedade de contração que mede a distância entre dois fluxos gradientes ao longo do tempo. Se a convexidade tornar-se forte o suficiente, então obtemos uma aproximação entre os dois fluxos. Estas e outras condições adicionais são dadas nos itens (E1), (E2), (E3), (E4) e (E5) do Capítulo 3.

Finalmente, aplicaremos a teoria métrica desenvolvida para os seguintes funcionais

$$\mathcal{E}_1(t, \mu) = \kappa \int_{\mathbb{R}^d} \mu \log(\mu) \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} V(t, x) \, d\mu(x), \quad (0.0.8)$$

e

$$\mathcal{W}(t, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} W(t, x, y) \, d(\mu \otimes \mu)(x, y), \quad (0.0.9)$$

onde  $\kappa \geq 0$  é uma constante,  $V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $W : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  são os potenciais de confinamento e interação, respectivamente, os quais satisfazem certas condições (tais como convexidade) que são especificadas no Capítulo 4. Como será visto, os fluxos gradientes gerados por tais funcionais são soluções distribucionais das equações de Fokker-Planck

$$\partial_t \mu_t + \nabla \cdot (\nabla V(t, x) \mu_t) = \kappa \Delta \mu_t$$

e a equação de agregação (escrita aqui para um potencial regular  $W$ ),

$$\begin{aligned} \partial_t \mu_t &= \nabla \cdot (\Psi(t, x) \mu_t) \\ \Psi(t, x, \mu_t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_1 W(t, x, y) + \partial_2 W(t, y, x)) \, d\mu_t(y). \end{aligned}$$

Aqui e no resto da introdução, os operadores  $\nabla$  e  $\Delta$  são tomados em relação às variáveis espaciais. Note que a equação anterior, é uma generalização da equação estudada em [6] para potenciais convexos e não necessariamente radiais. Evidentemente, também podemos

considerar o funcional

$$\mathcal{E}_2(t, \mu) = \kappa \int_{\mathbb{R}^d} \mu \log(\mu) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} W(t, x, y) \, d(\mu \otimes \mu)(x, y), \quad (0.0.10)$$

porém aqui limitamos nossa atenção para o caso onde o potencial de interação  $W$  é suficientemente regular, uma vez que não sabemos como caracterizar a equação de continuidade satisfeita pelo fluxo gradiente apenas sob hipótese de convexidade. Então, nessas condições o fluxo gradiente do funcional  $\mathcal{E}_2$  satisfaz a equação conhecida como equação de McKean-Vlasov

$$\begin{aligned} \partial_t \mu_t - \kappa \Delta \mu_t &= \nabla \cdot (\Psi(t, x) \mu_t) \\ \Psi(t, x, \mu_t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_1 W(t, x, y) + \partial_2 W(t, y, x)) \, d\mu_t(y). \end{aligned}$$

Cabe comentar que a equação de McKean-Vlasov modela a lei do processo estocástico descrito pela equação diferencial estocástica

$$dX_t = -\Psi(t, X_t, \mu_t) dt + \sqrt{2\kappa} dB_t,$$

onde  $B_t$  denota um movimento Browniano clássico, veja por exemplo [27].

Quando a difusão  $\kappa : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  depende do tempo, precisamos impor a condição de não-crescimento em  $\kappa(\cdot)$ . Nesta direção, comentamos que Petrelli e Tudorascu em [23] estudaram a equação de Fokker-Planck não-linear e não-homogênea

$$\partial_t u_t - \nabla(u \nabla V(t, x)) - \Delta(P(t, u)) = g(t, x, u) \text{ em } (0, T) \times \Omega, \quad (0.0.11)$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado e os dados iniciais não negativos são tomados em  $L^\infty(\Omega)$  tais que  $\int u_0 \, dx = 1$ . Eles mostraram a convergência do esquema discreto para uma solução de (0.0.11) no sentido de distribuições. No caso em que  $P(t, u) = \kappa(t)u$ , os autores impõem, além da condição de decrescimento na difusão, uma condição de limitação inferior acima do zero para  $\kappa(t)$ , mesmo no caso homogêneo. No entanto, aqui é permitido que a difusão torne-se arbitrariamente próxima do zero.

Notamos que para o caso de difusão variável, os funcionais envolvidos não satisfazem a condição **(E3)** da teoria métrica e portanto ela não é diretamente aplicável, porém é possível fazer uma adaptação direta dos argumentos e reobter os mesmos resultados, conseguindo assim a boa colocação das equações de Fokker-Planck e McKean-Vlasov com difusões variáveis, assim como propriedades qualitativas como a identidade de energia e a propriedade de contração.

Finalmente, no intuito de generalizar a teoria métrica, consideramos um funcional de energia interna mais geral do tipo

$$\mathcal{F}(t, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} F(t, \mu(x)) \, dx \quad (0.0.12)$$



para alguma função  $F : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  satisfazendo algumas condições de compatibilidade. Para tal funcional, adaptamos os argumentos da teoria métrica e reobtemos os mesmos resultados com exceção da identidade de energia. Além disto, o fluxo construído é uma solução no sentido de distribuições da equação não linear

$$\partial_t \mu_t - \Delta(P(t, \mu_t)) = 0,$$

onde  $P = z \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) - F(t, z)$ . Evidentemente, tais resultados continuam válidos se considerarmos a soma do funcional  $\mathcal{F}$  com qualquer uma das energias (potencial ou interação) que consideramos anteriormente; contudo, por simplicidade, consideramos apenas a energia interna.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, damos os pré-requisitos relacionados com a teoria métrica de fluxos gradientes para funcionais que não dependem do tempo, assim como resumimos a teoria de transporte de massa relevante para os nossos propósitos. Finalmente, fazemos uma descrição sucinta do espaço de Wasserstein  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ , de algumas propriedades geométricas e do cálculo sub-diferencial em tal espaço. O Capítulo 2 é dedicado ao estudo do modelo unidimensional (0.0.1) ou, mais precisamente, da equação (0.0.2), onde obtemos a boa colocação, propriedades qualitativas e estabilidade descritas acima. No Capítulo 3, desenvolvemos a teoria métrica de fluxos gradientes para funcionais que dependem do tempo, onde damos as condições suficientes que irão permitir obter a boa colocação e demais propriedades qualitativas. Finalmente, no Capítulo 4, damos aplicações da teoria desenvolvida no Capítulo 3 para os funcionais comentados acima. Neste Capítulo, também damos as adaptações para o caso dos funcionais que não satisfazem totalmente as condições dadas no Capítulo 3. Alertamos que a leitura do Capítulo 4 depende fortemente da leitura do Capítulo 3.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentamos os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do presente trabalho. Basicamente, apresentamos a teoria métrica de fluxos gradientes, a teoria de transporte ótimo de massa e uma revisão rápida do cálculo sub-diferencial no espaço de Wasserstein.

### 1.1 Teoria métrica de fluxos gradientes

Nesta seção, damos algumas definições e resultados sobre a teoria de fluxos gradientes em espaços métricos, a qual foi amplamente estudados na referencia [3, capítulo 1]. Ao longo desta seção, o par  $(X, d)$  denota um espaço métrico completo e separável. Uma vez que a noção de solução do conceito de fluxo gradiente exige uma certa regularidade, é natural começarmos com uma definição sobre regularidade de curvas.

**Definição 1.1.1.** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Dizemos que uma curva admissível  $v : I \rightarrow X$  pertence ao espaço  $AC^p(I; X)$  para  $p \in [1, +\infty]$ , se existe uma função  $m \in L^p(I)$  tal que

$$d(v(s), v(t)) \leq \int_s^t m(r) \, dr \text{ para toda } s < t \in I. \quad (1.1.1)$$

No caso  $p = 1$ , tal conjunto coincide com o conjunto de curvas absolutamente contínuas e, neste caso, será usada a notação  $AC(I; X)$ .

Dizemos que a curva é  $p$ -absolutamente contínua ou simplesmente absolutamente contínua quando o valor do expoente  $p$  for claro. Similarmente, definimos o conceito de uma curva  $v : I \rightarrow X$  ser localmente  $p$ -absolutamente contínua ou simplesmente localmente absolutamente contínua. O seguinte lema mostra que a definição anterior é forte o suficiente para permitir derivação de curvas.

**Lema 1.1.2.** *Seja  $p \in [1, +\infty]$ . Então, para qualquer curva  $v \in AC^p(I; X)$ , o limite*

$$|v'| (t) := \lim_{s \rightarrow t} \frac{d(v(s), v(t))}{|t - s|} \quad (1.1.2)$$

existe para quase todo  $t \in I$ . Mais ainda, a função  $t \rightarrow |v'|(t)$  pertence ao espaço  $L^p(I)$  e é uma função admissível na definição 1.1.1 com a seguinte propriedade de minimalidade: Se  $m \in L^p(I)$  é qualquer outra função admissível na definição 1.1.1 então  $|v'|(t) \leq m(t)$  para quase todo  $t \in I$ .

Agora, tendo uma noção de derivada métrica para curvas, é natural definir a noção de comprimento de arco. Antes, observamos que de fato é possível falar de comprimento de arco sem ter a noção de derivada métrica. O seguinte resultado permite fazer uma reparametrização de curvas absolutamente contínuas por comprimento de arco. Note que basta enunciar o resultado para o caso  $p = 1$ .

**Lema 1.1.3.** *Sejam  $a < b$  números reais,  $I$  um intervalo com extremos  $a, b$ , e  $v$  uma curva no espaço  $AC(I; X)$  com  $L := \int_a^b |v'|(t) dt$ .*

(a) *Para cada  $\epsilon > 0$ , existe uma função absolutamente contínua estritamente crescente*

$$\mathbf{s}_\epsilon : (a, b) \rightarrow (0, L_\epsilon) \text{ com } \mathbf{s}_\epsilon(a^+) = 0, \mathbf{s}_\epsilon(b^-) = L_\epsilon := L + \epsilon(b - a),$$

*e uma curva Lipschitz  $\hat{v}_\epsilon : (0, L_\epsilon) \rightarrow X$  tal que*

$$v = \hat{v}_\epsilon \circ \mathbf{s}_\epsilon, \quad |\hat{v}'_\epsilon| \circ \mathbf{s}_\epsilon = \frac{|v'|}{\epsilon + |v'|} \in L^\infty(a, b).$$

*A função  $\mathbf{s}_\epsilon$  admite uma inversa Lipschitz contínua  $\mathbf{t}_\epsilon : (0, L_\epsilon) \rightarrow (a, b)$  com constante Lipschitz menor igual do que  $\epsilon^{-1}$  e  $\hat{v}_\epsilon = v \circ \mathbf{t}_\epsilon$ .*

(b) *Existe uma função absolutamente contínua não decrescente*

$$\mathbf{s} : (a, b) \rightarrow [0, L] \text{ com } \mathbf{s}_\epsilon(a^+) = 0, \mathbf{s}_\epsilon(b^-) = L,$$

*e uma curva Lipschitz  $\hat{v} : (0, L) \rightarrow X$  tal que*

$$v = \hat{v} \circ \mathbf{s}, \quad |\hat{v}'| = 1, \text{ para quase todo ponto em } [0, L].$$

A seguir, vamos considerar funcionais do tipo  $\mathcal{E} : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  e estabelecer certa nomenclatura sobre eles. Dizemos que o funcional  $\mathcal{E}$  é *próprio* se existir  $u_0 \in X$  tal que  $\mathcal{E}(u_0) < \infty$ . Em seguida definimos o *domínio* de  $\mathcal{E}$  como sendo o conjunto

$$\text{Dom}(\mathcal{E}) = \{u \in X : \mathcal{E}(u) < \infty\}. \quad (1.1.3)$$

O seguinte resultado será importante na sequência deste trabalho.

**Lema 1.1.4** ([3] Lema 2.2.1). *Seja  $\mathcal{E} : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  um funcional, tal que existe  $\tau^* > 0$  e  $u^* \in X$  tal que*

$$\mathcal{E}_{\tau^*}(u^*) := \inf_{v \in X} \left\{ \mathcal{E}(v) + \frac{d^2(v, u^*)}{2\tau^*} \right\} > -\infty. \quad (1.1.4)$$

Então,

$$\mathcal{E}_\tau(u) \geq \mathcal{E}_{\tau^*}(u^*) - \frac{1}{\tau^* - \tau} d^2(u^*, u) \text{ para todo } 0 < \tau < \tau^*, \text{ e } u \in X,$$

e

$$d^2(u, v) \leq \frac{4\tau^*\tau}{\tau^* - \tau} \left( \mathcal{E}(v) + \frac{d^2(u, v)}{2\tau} - \mathcal{E}_{\tau^*}(u^*) + \frac{1}{\tau^* - \tau} d^2(u^*, u) \right).$$

Em particular, os subníveis da aplicação  $v \rightarrow \mathcal{E}(v) + \frac{d^2(u, v)}{2\tau}$  são limitados.

Outro conceito de relevância é o de *inclinação local* de um funcional, que permite dar uma reformulação métrica da noção de solução para um sistema de fluxo gradiente no contexto de espaços métricos.

**Definição 1.1.5.** Seja  $\mathcal{E} : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  um funcional próprio. Definimos a inclinação local de  $\mathcal{E}$  no ponto  $u \in X$  como

$$|\partial\mathcal{E}|(u) = \limsup_{v \rightarrow u} \frac{(\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v))^+}{d(u, v)}. \quad (1.1.5)$$

Note que  $\text{Dom}(|\partial\mathcal{E}|) \subset \text{Dom}(\mathcal{E})$ . Agora, defina o funcional  $\mathbf{E}(\tau, u; \cdot)$  definido por

$$\mathbf{E}(\tau, u; v) = \frac{d^2(u, v)}{2\tau} + \mathcal{E}(v),$$

para  $\tau > 0$  e  $u \in X$ . No próximo lema, relembremos uma estimativa para a inclinação local dada na definição 1.1.5.

**Lema 1.1.6** ([3] Lema 3.1.3). *Seja  $u_\tau$  um minimizador de  $\mathbf{E}(\tau, u; \cdot)$ . Então,  $u_\tau \in \text{Dom}(|\partial\mathcal{E}|)$  e além disso*

$$|\partial\mathcal{E}|(u_\tau) \leq \frac{d(u, u_\tau)}{\tau}.$$

Para tal funcional, iremos assumir a seguinte condição de convexidade: Dados  $u, v_0, v_1 \in X$  então existe uma curva  $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\gamma_0 = v_0$ ,  $\gamma_1 = v_1$  e

$$\mathbf{E}(\tau, u; \gamma_s) \leq (1 - s)\mathbf{E}(\tau, u; v_0) + s\mathbf{E}(\tau, u; v_1) - \frac{\lambda + \tau^{-1}}{2} s(1 - s) d^2(v_0, v_1), \quad (1.1.6)$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  e todo  $s \in [0, 1]$ . Assumindo a hipótese de convexidade, obtemos mais algumas propriedades para  $|\partial\mathcal{E}|$ .

**Teorema 1.1.7** ([3] Teorema 2.4.9). *Sob a hipótese de convexidade assumida em (1.1.6) e a semi-continuidade inferior do funcional  $\mathcal{E}$ , isto é,*

$$d(u_n, u) \rightarrow 0 \text{ implica } \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(u_n) \geq \mathcal{E}(u), \quad (1.1.7)$$

*temos que o funcional  $u \rightarrow |\partial\mathcal{E}|(u)$  é semicontínuo inferiormente em relação à métrica  $d$  e vale a seguinte fórmula*

$$|\partial\mathcal{E}|(u) = \sup_{v \neq u} \left( \frac{\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v)}{d(u, v)} + \frac{1}{2} \lambda d(u, v) \right)^+. \quad (1.1.8)$$

No que segue, damos uma breve descrição da equação de fluxo gradiente para o funcional  $\mathcal{E}$  no intervalo  $I = [0, +\infty)$ . Considere a equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} u'(t) &= -\nabla\mathcal{E}(u(t)), \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$

Um primeiro passo é, evidentemente, saber o que se entende por uma solução da equação anterior no contexto de espaços métricos. Tal ideia é abordada com um pouco mais de detalhe no começo do capítulo 3 para o caso em que o funcional  $\mathcal{E}$  pode depender na variável  $t$ . Mas, neste caso, escrevemos apenas a reformulação para a situação presente. A saber, usando o conceito de inclinação local dada na definição 1.1.5 e a noção de derivada métrica demonstrada no Lema 1.1.2, temos a seguinte reformulação equivalente: dizemos que uma curva  $u \in AC^2([0, +\infty); X)$  é um fluxo gradiente ou uma curva de inclinação maximal para o funcional  $\mathcal{E}$  se a composta  $\mathcal{E}(u(t))$  é uma função absolutamente contínua e satisfaz a desigualdade,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u(t)) \leq -\frac{1}{2} |\partial\mathcal{E}|^2(u(t)) - \frac{1}{2} |u'|^2(t). \quad (1.1.9)$$

Por outra parte, um segundo passo seria, como abordar a equação de fluxo gradiente. Para isto, observe que uma versão discreta implícita de tal equação é a seguinte

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_n} = -\nabla\mathcal{E}(u_{n+1}), \quad (1.1.10)$$

a qual pode ser vista como a equação de Euler-Lagrange para o funcional  $\frac{|v - u_n|^2}{2\tau_n} + \mathcal{E}(v)$ . Em outras palavras, uma maneira de construir uma “solução” discreta para a equação fluxo gradiente do funcional  $\mathcal{E}$  é a seguinte: considere uma partição  $\tau = \{0 = t_\tau^0 < t_\tau^1 < \dots < t_\tau^n < \dots\}$  e defina o tamanho do passo por  $\tau_n = t_\tau^n - t_\tau^{n-1}$ . Logo, dado um  $u_{n-1}$  defina  $u_n$ , como sendo um minimizante do funcional  $\mathbf{E}(\tau_n, u_{n-1}; v)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Definimos também as, assim chamadas, soluções aproximadas por um simples processo de interpolação, a saber  $u_\tau : [0, \infty) \rightarrow X$  por  $u_\tau(t) = u_n$  se  $t \in (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n]$ .

No seguinte teorema, condensamos os resultados sobre a abordagem anterior, colocando as hipóteses sob as quais todos os elementos definidos anteriormente estão bem colocados. Nele constam, a boa colocação e propriedades qualitativas do fluxo gradiente. Para uma demonstração deste resultado consultar [3, Capítulo 4]

**Teorema 1.1.8.** *Seja  $\mathcal{E} : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  um funcional próprio, semicontínuo inferiormente, satisfazendo a condição de coercividade (1.1.4) e a condição de convexidade (1.1.6). Então, a solução discreta  $u_n$ , e portanto a solução aproximada  $u_\tau$ , estão bem definidas e valem os seguintes itens:*

- (i) *Para cada  $u_0 \in \overline{\text{Dom}(\mathcal{E})}$  a solução aproximada  $u_\tau$ , com  $u_\tau(0) = u_0$ , converge localmente uniformemente, quando o tamanho da partição  $|\tau| \rightarrow 0$ , para uma curva  $S[u_0] = u : [0, \infty) \rightarrow X$  que pertence ao espaço  $AC_{loc}^2([0, +\infty); X)$ , com  $u(0) = u_0$ .*
- (ii) *A aplicação  $u_0 \rightarrow S[u_0]$  possui a seguinte propriedade de contração, fraca quando  $\lambda < 0$  e forte quando  $\lambda \geq 0$ ,*

$$d(S[u_0](t), S[v_0](t)) \leq e^{-\lambda t} d(u_0, v_0),$$

onde  $v_0 \in \overline{\text{Dom}(\mathcal{E})}$ .

- (iii) *No caso em que  $\lambda = 0$  e o funcional  $\mathcal{E}$  possui pelo menos um minimizante  $\bar{u}$ , então vale a propriedade de estabilidade assintótica para o ponto de equilíbrio do funcional*

$$\mathcal{E}(u(t)) - \mathcal{E}(\bar{u}) \leq \frac{d^2(u_0, \bar{u})}{2t}.$$

Além disso, a aplicação  $t \rightarrow d(u(t), \bar{u})$  é não-crescente.

- (iv) *Assumindo que  $\lambda = 0$ , temos a estimativa de erro para a convergência da solução aproximada*

$$d^2(u_\tau(t), u(t)) \leq |\tau| (\mathcal{E}(u_0) - \mathcal{E}_t(u_0)).$$

O Teorema anterior é parcialmente generalizado no capítulo 3 para o caso de um funcional dependendo da variável  $t \geq 0$ . De fato, mostramos que a mesma abordagem pode ser adaptada para tal caso com as condições apropriadas sobre tal funcional. Encerramos esta seção com um resultado de regularidade para funções de duas variáveis sob hipóteses de regularidade em cada variável separadamente. Uma prova deste resultado pode ser encontrada em [28, Lema 23.28]

**Lema 1.1.9.** *Seja  $F = F(t, s)$  uma função de  $[0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente contínua na variável  $t$  uniformemente em  $s$ , e absolutamente contínua em  $s$  uniformemente em  $t$ ; mais precisamente, existe uma função não negativa  $m \in L_{loc}^1([0, \infty))$  tal que*

$$|F(t, s) - F(t', s)| \leq \int_{t'}^t m(r) dr \text{ e } |F(t, s) - F(t, s')| \leq \int_{s'}^s m(r) dr,$$

onde  $m$  não depende de  $s$  na primeira desigualdade e de  $t$  na segunda. Então, a função  $\delta(t) := F(t, t)$  é localmente absolutamente contínua e, para quase todo ponto  $t_0 \in [0, T]$ , temos a estimativa

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \delta(t) \leq \limsup_{t \uparrow t_0} \left( \frac{F(t_0, t) - \delta(t_0)}{t - t_0} \right) + \limsup_{t \downarrow t_0} \left( \frac{F(t, t_0) - \delta(t_0)}{t - t_0} \right). \quad (1.1.11)$$

## 1.2 Teoria de transporte

Nesta seção, são descritos os pré-requisitos necessários da teoria de transporte que serão de vital importância no desenvolvimento do presente trabalho. Esta seção é baseada nas referências [29] e [3]. Primeiro, estabelecemos algumas notações que ajudaram na compreensão do texto.

Reservamos, a menos que seja esclarecido, as letras do alfabeto grego como  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\omega$ , etc, para denotar as medidas de probabilidade de Borel, em algum espaço topológico, que comumente será o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^d$  ou o círculo  $\mathbb{S}^1$ . Seja  $T : X \rightarrow Y$  uma aplicação mensurável entre dois espaços mensuráveis. Se  $\mu$  é uma medida no espaço  $X$ , definimos o pushforward da medida  $\mu$  via a aplicação  $T$  como a medida em  $Y$  dada por  $T_{\#}\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$  para todo conjunto mensurável  $B \subset Y$ . Continuando, dado um espaço topológico  $X$ , denotamos por  $\mathcal{P}(X)$  o conjunto de todas as medidas de probabilidade de Borel em  $X$ .

Agora, vamos descrever brevemente o problema de Monge-Kantorovich para o transporte de massa. A primeira formulação foi feita pelo matemático francês Gaspard Monge no ano de 1781, e é dada como segue: sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços mensuráveis,  $c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  uma função mensurável chamada de função *custo* e duas medidas de probabilidade  $\mu$  e  $\nu$  em  $X$  e  $Y$ , respectivamente. O problema de Monge consiste em achar uma aplicação mensurável  $\tilde{T} : X \rightarrow Y$  tal que  $\tilde{T}_{\#}\mu = \nu$  e

$$\int_X c(x, \tilde{T}(x)) d\mu(x) = \inf \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) : T : X \rightarrow Y, T_{\#}\mu = \nu \right\}. \quad (1.2.1)$$

O problema anterior também é conhecido como *problema de transferência de massa*. A formulação anterior pode ser em algumas situações mal colocada, de fato, podemos pensar no caso em que a medida  $\mu$  é uma delta Dirac e  $\nu$  não sendo deste tipo, logo pode-se mostrar que não existe uma aplicação tal que  $T_{\#}\mu = \nu$ . Em vista de tal inconveniente precisamos de uma reformulação. Com efeito, o matemático russo Leonid Kantorovich abordou o mesmo problema com a seguinte reformulação: dadas duas medidas de probabilidade  $\mu$  no espaço  $X$  e  $\nu$  no espaço  $Y$ , denote por  $\Gamma(\mu, \nu)$  o conjunto das medidas de probabilidade  $\gamma$  no espaço mensurável  $X \times Y$  tais que  $\gamma(A \times Y) = \mu(A)$  e  $\gamma(X \times B) = \nu(B)$ .

Estamos interessados em achar uma medida  $\gamma_0 \in \Gamma(\mu, \nu)$  tal que

$$\int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma_0(x, y) = \inf \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y) : \gamma \in \Gamma(\mu, \nu) \right\}. \quad (1.2.2)$$

Note que, o problema de Kantorovich (1.2.2) é uma reformulação do problema de Monge (1.2.1) e é bem colocado. De fato, a medida produto sempre está no conjunto  $\Gamma(\mu, \nu)$ . Como já é de costume na literatura, chamaremos de problema de Monge-Kantorovich a qualquer um dos problemas (1.2.1) e (1.2.2), desde que fique claro no contexto.

Estamos interessados no problema de Monge-Kantorovich no caso em que  $X = Y = \mathbb{R}^d$  e a função custo  $c$  é dada pela norma Euclidiana. Neste caso, é bem conhecido que tal problema é bem posto e admite pelo menos uma solução no subconjunto  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  definido como

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : M_2(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 d\mu(x) < +\infty \right\}. \quad (1.2.3)$$

Aqui a expressão  $M_2(\mu)$  é o segundo momento de  $\mu$ . É também conhecido que, no espaço  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ , o problema de Monge-Kantorovich define uma métrica completa, conhecida como a métrica de Wasserstein. Para posterior referência, damos a expressão explícita desta métrica

$$\mathbf{d}_2^2(\mu, \nu) = \min \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^2 d\gamma(x, y) : \gamma \in \Gamma(\mu, \nu) \right\}. \quad (1.2.4)$$

Para os resultados de existência de solução para o problema de Monge-Kantorovich referimos o livro de Cedric Villani [29, capítulo 1] onde se tem uma apresentação bastante detalhada (veja também [3, capítulo 6]). Em [3, capítulo 7] encontra-se os resultados sobre a métrica de Wasserstein tais como completude e a existência de geodésicas como curvas que minimizam a distância entre pontos.

A seguir enunciamos um teorema que contém os resultados de regularidade necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Antes disso, lembre que o suporte de uma medida de probabilidade  $\mu$  no espaço  $\mathbb{R}^d$  é o menor conjunto fechado  $F \subset \mathbb{R}^d$  tal que  $\mu(F) = 1$ . Neste caso denotamos tal conjunto por  $\mathbf{Supp}(\mu)$ .

**Teorema 1.2.1.** *Sejam  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  e considere o problema de Monge-Kantorovich com custo quadrático  $c(x, y) = |x - y|^2$  em (1.2.2). Então:*

- (i) **(Critério de Knott-Smith)** *Um plano de transporte  $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$  é uma solução do problema de Monge-Kantorovich se e somente se existe uma função convexa e semicontínua inferiormente  $\phi$  tal que*

$$\mathbf{Supp}(\gamma) \subset \mathbf{Graph}(\partial\phi), \quad (1.2.5)$$

onde  $\mathbf{Graph}(\partial\phi)$  denota o gráfico da sub-diferencial  $\partial\phi$  da função convexa.



(ii) **(Brenier)** Se  $\mu$  não dá massa a conjuntos com dimensão de Hausdorff menor ou igual a  $d - 1$ , então existe um único plano de transporte ótimo  $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$  caracterizado pela expressão

$$\gamma = (Id \times \nabla \phi)_\# \mu, \quad (1.2.6)$$

onde  $\nabla \phi$  é o único, a menos de um conjunto de  $\mu$ -medida nula, gradiente de uma função convexa que empurra  $\mu$  para  $\nu$ , i.e.  $\nu = \nabla \phi_\# \mu$ . Em particular, temos que

$$\mathbf{d}_2^2(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} |x - \nabla \phi(x)|^2 d\mu(x).$$

Ao longo deste trabalho, denotamos a aplicação dada pelo Teorema anterior por  $\mathbf{t}_\mu^\nu = \nabla \phi$ . Para uma demonstração do Teorema anterior referimos [29, Teorema 2.12].

Naturalmente, uma das aplicações da teoria resumida na seção 1.1 pode ser feita no espaço métrico de Wasserstein  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), \mathbf{d}_2)$ . Nesta direção, vimos que as curvas absolutamente contínuas desempenham um papel importante na teoria. Portanto, a seguir damos um resultado que caracteriza tais curvas em  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), \mathbf{d}_2)$ . Tal caracterização será de vital importância quando resolvermos certas equações diferenciais parciais.

**Teorema 1.2.2.** *Seja  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ ,  $\mu_t : I \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  uma curva absolutamente contínua e  $|\mu'| \in L^1(I)$  a derivada métrica de  $\mu_t$  no sentido do Lema 1.1.2. Então, existe um campo vetorial de Borel  $v : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , com a notação  $v_t(x) := v(t, x)$ , tal que*

$$v_t \in L^2(\mu_t; \mathbb{R}^d), \quad \|v_t\|_{L^2(\mu_t)} \leq |\mu'| (t) \quad \text{em quase todo } t \in I. \quad (1.2.7)$$

Além disto, a equação de continuidade

$$\partial_t \mu_t + \nabla \cdot (v_t \mu_t) = 0 \quad \text{em } I \times \mathbb{R}^d, \quad (1.2.8)$$

é satisfeita no sentido de distribuições, i.e.

$$\int_I \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \eta(t, x) + \nabla \eta(t, x) \cdot v_t) d\mu_t(x) dt = 0, \quad (1.2.9)$$

para toda  $\eta \in C_c^\infty(I \times \mathbb{R}^d)$ . Mais ainda, para quase todo  $t \in I$ ,  $v_t$  pertence ao fecho em  $L^2(\mu_t; \mathbb{R}^d)$  do subespaço formado pelos gradientes  $\nabla \eta$  com  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Reciprocamente, se uma curva  $\mu_t : I \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  é contínua em relação à topologia fraca induzida pela dualidade com as funções contínuas e limitadas, e satisfaz a equação de continuidade (1.2.8) para algum campo vetorial Borel mensurável  $v_t$  com  $\|v_t\|_{L^2(\mu_t)} \in L^1(I)$ , então  $\mu_t$  é uma curva absolutamente contínua e  $|\mu'| (t) \leq \|v_t\|_{L^2(\mu_t)}$  para quase todo  $t \in I$ .

A prova da caracterização anterior pode ser encontrada em [3, Teorema 8.3.1]. Note que, a condição de minimalidade no campo vetorial  $v_t$  implica que na verdade  $\|v_t\|_{L^2(\mu_t)} =$

$|\mu'| (t)$ . Pelo resultado anterior, pode-se também motivar a definição de plano tangente em um ponto do espaço de Wasserstein. De fato, o plano tangente é definido como

$$T_\mu \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) = \overline{\{\nabla \eta : \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\}}^{L^2(\mu)}. \quad (1.2.10)$$

Agora, vamos construir um tipo de curva, chamada de geodésica generalizada, as quais são importantes para a aplicação da teoria métrica baseada na condição de convexidade (1.1.6). De fato, a importância dela reside no fato que elas são adequadas para obter a propriedade de convexidade de um funcional baseado na métrica de Wasserstein. Sejam  $\mu_0, \mu_1, \sigma \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  e considere também  $\gamma_0 \in \Gamma(\sigma, \mu_0)$  e  $\gamma_1 \in \Gamma(\sigma, \mu_1)$  dois planos ótimos no problema de Monge-Kantorovich definindo a métrica de Wasserstein. Usando um teorema conhecido como Teorema de desintegração (veja por exemplo [2]) é possível construir uma medida  $\gamma$  em  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  tal que  $P_{1\#}\gamma = \sigma$ ,  $P_{2\#}\gamma = \mu_0$ ,  $P_{3\#}\gamma = \mu_1$ ,  $P_{1,2\#}\gamma = \gamma_0$  e  $P_{1,3\#}\gamma = \gamma_1$ , onde  $P_i$  e  $P_{i,j}$  denotam as projeções de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  na coordenada  $i$  ou na coordenada  $(i, j)$ , respectivamente, com  $i, j = 1, 2, 3$ . Com esta construção em mente temos a seguinte definição.

**Definição 1.2.3.** Sejam  $\sigma, \mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  e  $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  dois planos ótimos no problema (1.2.4) que define  $\mathbf{d}_2(\sigma, \mu_0)$  e  $\mathbf{d}_2(\sigma, \mu_1)$ , respectivamente. Seja  $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  um 3-plano tal que  $P_{1,2\#}\gamma = \gamma_0$  e  $P_{1,3\#}\gamma = \gamma_1$ , onde  $P_{i,j}$  são as projeções dadas acima. Uma geodésica generalizada com ponto base  $\sigma$  ligando  $\mu_0$  com  $\mu_1$  é dada pela interpolação  $\mu_t = ((1-t)P_2 + tP_3)_\# \gamma$ , para  $t \in [0, 1]$ .

Finalmente, se  $\sigma$  é uma medida suficientemente regular, então sabemos que existem aplicações de transporte  $\mathbf{t}_\sigma^{\mu_0}$  e  $\mathbf{t}_\sigma^{\mu_1}$  tais que na definição anterior  $\gamma_0 = (Id \times \mathbf{t}_\sigma^{\mu_0})_\# \sigma$  e  $\gamma_1 = (Id \times \mathbf{t}_\sigma^{\mu_1})_\# \sigma$ . Logo, podemos ver que as geodésicas generalizadas neste caso são da forma  $\mu_t = ((1-t)\mathbf{t}_\sigma^{\mu_0} + t\mathbf{t}_\sigma^{\mu_1})_\# \sigma$ .

### 1.3 Funcionais clássicos

Nesta seção, faremos uma rápida revisão do cálculo sub-diferencial desenvolvido em [3] para funcionais. Começamos definindo o conceito de funcional convexo ao longo de geodésicas generalizadas.

**Definição 1.3.1.** Considere um funcional  $\mathcal{E} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$ . Dizemos que  $\mathcal{E}$  é  $\lambda$ -convexo ao longo de geodésicas generalizadas para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  se para quaisquer  $\sigma, \mu_0, \mu_1 \in \text{Dom}(\mathcal{E})$  existe uma geodésica generalizada com base no ponto  $\sigma$  e induzida por um 3-plano  $\gamma$  como na definição 1.2.3, tal que

$$\mathcal{E}(\mu_t) \leq (1-t)\mathcal{E}(\mu_0) + t\mathcal{E}(\mu_1) - \frac{\lambda}{2}t(1-t)\mathbf{d}_\gamma^2(\mu_0, \mu_1), \quad \forall t \in [0, 1], \quad (1.3.1)$$

onde

$$\mathbf{d}_\gamma^2(\mu_0, \mu_1) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |y - z|^2 d\gamma(x, y, z).$$

Agora, apresentamos exemplos de funcionais que satisfazem a condição de convexidade dada na definição 1.3.1.

**Funcional de entropia:** Denote por  $\mathcal{P}_{2,ac}(\mathbb{R}^d)$  o conjunto de medidas de probabilidade com segundo momento finito que são absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue. O funcional de entropia  $\mathcal{U} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  é definido por

$$\mathcal{U}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \log(\rho(x)) dx, \quad (1.3.2)$$

se  $d\mu = \rho dx$  e  $\mathcal{U}(\mu) = +\infty$  em caso contrário.

**Energia potencial:** Dada uma função  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  chamada de potencial de confinamento, definimos a energia potencial  $\mathcal{V} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  por

$$\mathcal{V}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} V(x) d\mu(x). \quad (1.3.3)$$

**Energia de interação** Dada uma função  $W : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  chamada de potencial de interação, definimos a energia de interação  $\mathcal{W} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  por

$$\mathcal{W}(\mu) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} W(x, y) d(\mu \otimes \mu)(x, y). \quad (1.3.4)$$

Para os funcionais definidos acima temos o seguinte resultado de convexidade.

**Teorema 1.3.2** ([3] Capítulo 9). *Valem as seguintes afirmações:*

- (i) *O funcional de entropia  $\mathcal{U}$  é 0-convexo ao longo de geodésicas generalizadas.*
- (ii) *Assuma que as funções  $V$  e  $W$  são  $\lambda$ -convexas para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então os funcionais energia potencial  $\mathcal{V}$  e energia de interação  $\mathcal{W}$  são  $\lambda$ -convexos ao longo de geodésicas generalizadas.*
- (iii) *Seja  $\sigma \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  fixo. Então, o funcional  $\mu \rightarrow \mathbf{d}_2^2(\sigma, \mu)$  é 2-convexo ao longo de geodésicas generalizadas baseadas na medida  $\sigma$ .*

A seguir, damos o conceito de sub-diferencial para funcionais convexos no sentido definido acima. De fato, tal conceito pode ser dado para funcionais mais gerais, porém, uma vez que só trabalharemos com funcionais convexos, basta a definição abaixo.

**Definição 1.3.3.** Seja  $\mathcal{E} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  um funcional próprio, semicontínuo inferiormente e  $\lambda$ -convexo ao longo de geodésicas generalizadas. Uma medida de probabilidade  $\gamma \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  pertence à sub-diferencial  $\partial\mathcal{E}(\mu)$  se

- (i)  $P_{1\#}\gamma = \mu$ ,

- (ii) Para qualquer  $\sigma \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ , existe uma medida de probabilidade  $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  tal que  $P_{1,2\#}\gamma = \gamma$  e  $P_{3\#}\gamma = \sigma$  satisfazendo

$$\mathcal{E}(\sigma) - \mathcal{E}(\mu) \geq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle y, z - x \rangle d\gamma(x, y, z) + \frac{\lambda}{2} \mathbf{d}_2^2(\mu, \sigma). \quad (1.3.5)$$

O próximo teorema relaciona o conceito de sub-diferencial e o de inclinação local dada na definição 1.1.5.

**Teorema 1.3.4** ([3] Teorema 10.3.11). *Seja  $\mathcal{E}$  um funcional semicontínuo inferiormente satisfazendo a condição de coercividade (1.1.4), assuma também que  $\partial\mathcal{E}(\mu)$  é não vazio. Então, existe um único sub-diferencial  $\gamma_0 \in \partial\mathcal{E}(\mu)$  tal que*

$$|\gamma_0|_2 = \min \{|\gamma|_2 : \gamma \in \partial\mathcal{E}(\mu)\} = |\partial\mathcal{E}|(\mu), \quad (1.3.6)$$

onde

$$|\gamma|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |y|^2 d\gamma(x, y).$$

Denotamos tal elemento por  $\partial^\circ\mathcal{E}(\mu)$ .

Para o caso dos funcionais que serão tratados neste trabalho, a sub-diferencial pode ser representada por uma aplicação. De fato, temos a caracterização a seguir a qual pode ser encontrada em [3, Teoremas 10.4.6, 10.4.13].

**Teorema 1.3.5.** *Os seguintes itens são válidos:*

- (i) *Seja  $d\mu = \rho dx$  uma medida em  $\mathcal{P}_{2,ac}(\mathbb{R}^d)$  que está em  $\text{Dom}(|\partial\mathcal{U}|)$ . Então,  $\rho \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  e existe um campo vetorial  $\mathbf{w}\rho = \nabla\rho$  com  $\mathbf{w} \in L^2(\mu; \mathbb{R}^d)$ , tal que  $(Id \times \mathbf{w})_{\#}\mu = \partial^\circ\mathcal{E}(\mu)$ . Vale também a recíproca.*
- (ii) *Considere o funcional  $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$  com as hipóteses dadas no Teorema 1.3.2. Então, a sub-diferencial é caracterizada pela identidade*

$$\mathbf{w}\rho = \nabla\rho + \rho\nabla V \text{ para algum } \mathbf{w} \in L^2(\mu; \mathbb{R}^d), \quad (1.3.7)$$

onde  $d\mu = \rho dx$ ,  $\rho \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  e  $(Id \times \mathbf{w})_{\#}\mu = \partial^\circ\mathcal{E}(\mu)$ .

Para o caso do funcional de interação (1.3.4), assumimos as seguintes hipóteses para o potencial  $W$ :

- 1.-  $W$  é simétrico, isto é,  $W(x, y) = W(y, x)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .
- 2.-  $W$  é uma função  $\lambda$ -convexa para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- 3.-  $W$  possui crescimento quadrático, i.e. existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$W(x, y) \leq C(1 + |x|^2 + |y|^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

O próximo resultado é uma caracterização para a sub-diferencial do funcional de interação mostrada em [9, Teorema 3.3].

**Teorema 1.3.6.** *Seja  $W$  um potencial satisfazendo as condições 1, 2 e 3 citadas acima. Se  $(Id \times \xi)_\# \mu = \partial^\circ \mathcal{W}(\mu)$ , então existe uma seleção mensurável  $(\eta_1, \eta_2) \in \partial W$  tal que*

$$\xi(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\eta_1(x, y) + \eta_2(y, x)) d\mu(y) \text{ para } \mu - q.t.p. x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.3.8)$$

Agora, apresentamos uma versão da regra da cadeia para funcionais no espaço de Wasserstein que é válida sob hipóteses fracas de regularidade. Para uma prova veja [3, Proposição 10.3.18].

**Teorema 1.3.7.** *Seja  $\mathcal{E}$  um funcional semicontínuo inferiormente  $\lambda$ -convexo ao longo de geodésicas generalizadas e satisfazendo a condição de coercividade (1.1.4) e  $\mu_t : (a, b) \rightarrow \text{Dom}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  é uma curva absolutamente contínua com campo de velocidade  $v_t$  dado pelo Teorema 1.2.2. Se  $t_0 \in (a, b)$  é um ponto a onde  $|\partial \mathcal{E}|(\mu_t) < \infty$ ,  $\mathcal{E} \circ \mu_t$  é diferenciável, então vale a seguinte regra de derivação*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\mu_t)|_{t=t_0} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle y, v_t(x) \rangle d\gamma_t(x, y) \quad \forall \gamma_{t_0} \in \partial \mathcal{E}(\mu_{t_0}). \quad (1.3.9)$$

# Capítulo 2

## Modelo Unidimensional Periódico

Neste capítulo, estudamos soluções periódicas de um modelo de transporte unidimensional com campo de velocidades dependendo de forma não local da solução. A principal motivação vem do caso em que tal campo de velocidades é dado pela transformada de Hilbert periódica. Mas precisamente, consideremos a equação

$$\partial_t \mu + \partial_x (H(\mu)\mu) = 0 \quad (2.0.1)$$

com a condição inicial  $\mu(0) = \mu_0$ , onde

$$H(\mu) = \frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\frac{x-y}{2}\right) \mu(y) dy. \quad (2.0.2)$$

Para maior generalidade consideremos um modelo com viscosidade, que permitirá obter uma certa regularidade no caso em que tal viscosidade é não nula. De fato, consideramos

$$\partial_t \mu + \partial_x (H(\mu)\mu) = \nu \partial_{xx} \mu \quad (2.0.3)$$

onde  $\nu \geq 0$  é uma constante chamada de viscosidade.

### 2.1 Teoria de transporte no círculo

Nesta seção, denotamos por  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  o círculo unitário canônico com a topologia quociente. Quando conveniente, também identificamos  $\mathbb{S}^1$  com o conjunto  $[-\pi, \pi)$  com a topologia quociente. Lembre que  $C^k(\mathbb{S}^1)$  denota o conjunto das funções  $2\pi$ -periódicas e de classe  $C^k$  com  $k \geq 0$  sendo um inteiro. Em particular,  $C(\mathbb{S}^1) = C^0(\mathbb{S}^1)$  denota o conjunto das funções contínuas  $2\pi$ -periódicas.

Lembremos que  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  denota o conjunto das medidas de probabilidade de Borel em  $\mathbb{S}^1$ . Munimos  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  com a métrica periódica de Wasserstein definida por

$$\mathbf{d}_{per}^2(\mu, \rho) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} d_{per}^2(x, y) d\gamma(x, y) : \gamma \in \Gamma_{per}(\mu, \rho) \right\}, \quad (2.1.1)$$

onde  $\Gamma_{per}(\mu, \rho) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) : \gamma(A \times \mathbb{S}^1) = \mu(A), \gamma(\mathbb{S}^1 \times A) = \rho(A)\}$  e  $d_{per}$  denota a distância geodésica em  $\mathbb{S}^1$ . Como já é clássico, denotamos por  $\mathcal{P}_{ac}(\mathbb{S}^1)$  o conjunto das medidas de probabilidade que são absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue em  $\mathbb{S}^1$ . O seguinte fato é uma consequência imediata de um resultado de regularidade, veja por exemplo [14] ou Teorema 1.2.1(ii): se  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  é uma medida que não possui átomos, isto é,  $\mu$  se anula em conjuntos unitários de  $\mathbb{S}^1$ , então existe uma única aplicação  $\mathbf{t}_\mu^\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $\rho = \mathbf{t}_{\mu\#}^\rho \mu$  e

$$\mathbf{d}_{per}^2(\mu, \rho) = \int_{\mathbb{S}^1} d_{per}^2(x, \mathbf{t}_\mu^\rho(x)) d\mu(x). \quad (2.1.2)$$

Por outro lado, em [16] define-se o espaço  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  (em qualquer dimensão) por meio de uma relação de equivalência, imitando a construção de  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , da seguinte forma: seja  $\mu, \rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , então definimos a relação de equivalência

$$\mu \sim \rho \leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \zeta d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \zeta d\rho(x), \quad (2.1.3)$$

para toda  $\zeta \in C(\mathbb{S}^1)$ . Sobre a relação anterior, dada uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , então existe um único representante da classe de equivalência de  $\mu$ , denotada por  $\hat{\mu}$  que está suportada no conjunto  $[-\pi, \pi)$ . Com efeito, considere a aplicação  $T : \mathbb{R} \rightarrow [-\pi, \pi)$

$$T(x) = \begin{cases} x - 2\pi \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor & \text{se } 0 \leq \frac{x}{2\pi} - \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor < \frac{1}{2} \\ x - 2\pi \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor - 2\pi & \text{se } \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2\pi} - \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor < 1, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

onde  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota a função maior inteiro, então tal medida é dada por  $\hat{\mu} = T_{\#}\mu$ . Desta maneira, cada medida de probabilidade em  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  pode ser identificada com uma única classe de equivalência dada pela relação acima. Na mesma referência, os autores mostraram a seguinte identidade que relaciona a métrica de Wasserstein periódica e a métrica de Wasserstein euclidiana. Mais precisamente, vale a seguinte identidade

$$\mathbf{d}_{per}^2(\mu, \rho) = \min\{\mathbf{d}_2^2(\mu, \rho^*) : \rho \sim \rho^*\}, \quad (2.1.5)$$

onde  $\mathbf{d}_2$  denota a distância de Wasserstein euclidiana. Na identidade acima, o lado esquerdo deve ser pensado como a distância entre os representantes da classe de equivalência de  $\mu$  e  $\rho$ , cujo suporte está contido no intervalo  $[-\pi, \pi)$ .

Voltando ao caso em que existe uma aplicação de transporte que satisfaz (2.1.2), é claro que a aplicação  $\mathbf{t}_\mu^\rho$  pode ser vista como definida em  $[-\pi, \pi]$  com valores em  $\mathbb{S}^1$ . Seguindo [8] definimos a aplicação  $\widetilde{\mathbf{t}}_\mu^\rho : [-\pi, \pi] \rightarrow [-\pi, 3\pi]$  dizendo que  $\widetilde{\mathbf{t}}_\mu^\rho(x)$  é o menor elemento da classe de equivalência de  $\mathbf{t}_\mu^\rho(x)$  tal que  $|x - \widetilde{\mathbf{t}}_\mu^\rho(x)| \leq \pi$ . Neste caso, é claro que  $d_{per}(x, \mathbf{t}_\mu^\rho(x)) = |x - \widetilde{\mathbf{t}}_\mu^\rho(x)|$  e por construção temos que

$$\widetilde{\mathbf{t}}_\mu^\rho(-\pi) = \widetilde{\mathbf{t}}_\mu^\rho(\pi) + 2\pi =: a + 2\pi. \quad (2.1.6)$$

A seguinte observação é importante para o restante deste capítulo.

*Observação 2.1.1.* A medida  $\tilde{\rho} := \widetilde{\mathbf{t}}_{\mu\#}^{\rho}\rho$  realiza o mínimo em (2.1.5). Mais ainda, a aplicação  $\widetilde{\mathbf{t}}_{\mu}^{\rho}$  realiza o transporte ótimo com custo euclidiano quadrático entre  $\mu$  e  $\tilde{\rho}$  e portanto tal aplicação é monótona não-decrescente.

De fato, lembre que podemos olhar as medidas de probabilidade  $\mu, \rho \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  como sendo suportadas em  $[-\pi, \pi)$ . Considere a medida  $\tilde{\rho} = \widetilde{\mathbf{t}}_{\mu\#}^{\rho}\rho$  que está suportada em  $[a, a + 2\pi)$ . Note que  $\tilde{\rho} \sim \rho$  e além disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2^2(\mu, \tilde{\rho}) &\leq \int_{[-\pi, \pi)} |x - \widetilde{\mathbf{t}}_{\mu}^{\rho}(x)|^2 d\mu(x) \\ &= \int_{[-\pi, \pi)} d_{\text{per}}^2(x, \mathbf{t}_{\mu}^{\rho}(x)) d\mu(x) \\ &= \mathbf{d}_{\text{per}}^2(\mu, \rho). \end{aligned}$$

Logo, pela identidade (2.1.5), obtemos a conclusão da observação. Em particular, vale

$$\mathbf{d}_{\text{per}}^2(\mu, \rho) = \int_{[-\pi, \pi)} |x - \widetilde{\mathbf{t}}_{\mu}^{\rho}(x)|^2 d\mu(x). \quad (2.1.7)$$

Em geral, segue de (2.1.5) que dados  $\mu, \rho \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  existe  $\rho^* \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  e  $\gamma^* \in \Gamma(\mu, \rho^*)$  tal que  $\rho \sim \rho^*$  e

$$\mathbf{d}_{\text{per}}^2(\mu, \rho) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |x - y|^2 d\gamma^*(x, y). \quad (2.1.8)$$

## 2.2 Formulação como fluxo gradiente e funcionais periódicos

Uma manipulação formal da equação (2.0.3) permite-nos reescrevê-la da seguinte forma

$$\begin{aligned} \partial_t \mu &= \partial_x \left[ \mu \left( \nu \frac{\mu_x}{\mu} - H(\mu) \right) \right] \\ &= \partial_x \left[ \mu \partial_x \left( \nu \log(\mu) - \frac{1}{\pi} \log |\sin(x/2)| * \mu \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Tendo em conta esta reformulação, é natural no contexto de fluxos gradientes, definir o seguinte potencial de interação.

$$\widetilde{W}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \log |\sin(x/2)| & \text{se } x \in [-\pi, \pi), x \neq 0; \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

e  $\widetilde{W}(x + 2\pi) = \widetilde{W}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Baseado no comportamento geométrico deste potencial, no que segue, permitiremos um potencial mais geral. Portanto, dada uma função  $W : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ , que chamamos



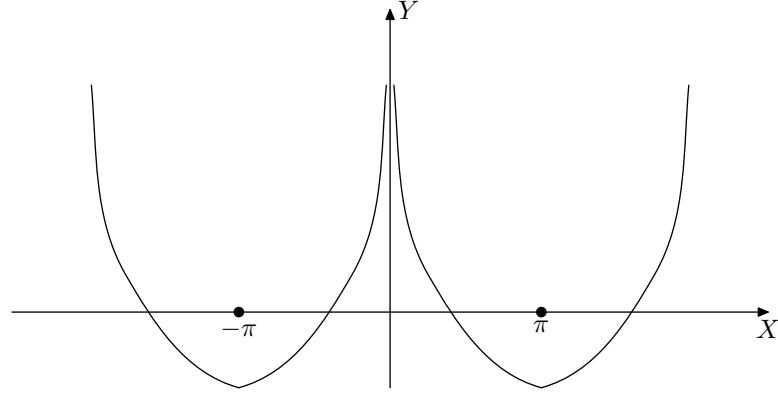


Figura 2.1: Potencial de interação.

de potencial de interação, assumiremos ao longo deste capítulo que são válidas as seguintes condições:

- I1)**  $W$  é uma função par, semicontínua inferiormente,  $W(0) = +\infty$  e  $W(x + 2\pi) = W(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,
- I2)**  $W$  é diferenciável em  $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$  e as derivadas laterais em  $\pi$  existem e são nulas, i.e.

$$\frac{d^-}{dx} W(\pi) = \frac{d^+}{dx} W(\pi) = 0,$$

- I3)**  $W$  é convexa separadamente em cada intervalo  $(-\pi, 0)$ ,  $(0, \pi)$  e existe  $\alpha \in (0, 1)$  tal que

$$\sup_{0 < t < \pi} t^\alpha W(t) < \infty. \quad (2.2.3)$$

Se denotarmos por  $\alpha^* \geq 0$  o ínfimo dos  $\alpha$  tais que (2.2.3) é válido, então também assumimos que

$$\sup_{0 < t < \pi} |t^{1+\alpha^*} W'(t)| < \infty \text{ e } \inf_{0 < t < \epsilon} t^{\alpha^*} W(t) > 0. \quad (2.2.4)$$

Segue das condições **(I1)**-(**I3**) que  $W$  é limitada inferiormente e convexa nos intervalos  $(-2\pi, 0)$  e  $(0, 2\pi)$ , separadamente, veja Figura 2.1.

*Observação 2.2.1.* Note que quando  $\alpha^* > 0$  temos

$$\inf_{0 < t \leq \epsilon} t^\beta W(t) > 0,$$

para  $\beta \in (0, \alpha^*)$  e  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Dada a estrutura de fluxo gradiente formal (2.2.1), definimos o funcional  $\mathcal{F}_\nu : \mathcal{P}(\mathbb{S}^1) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  da seguinte maneira

$$\mathcal{F}_\nu[\mu] = \nu \mathcal{U}[\mu] + \mathcal{W}[\mu], \quad (2.2.5)$$

onde  $\nu \geq 0$ ,

$$\mathcal{U}[\mu] = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \mu \log(\mu) \, dx & \text{se } \mu \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{S}^1) \\ +\infty & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (2.2.6)$$

é chamado de funcional de entropia e

$$\mathcal{W}[\mu] = \frac{1}{2} \int_{[-\pi, \pi)^2} W(x-y) \, d\mu \otimes \mu(x, y), \quad (2.2.7)$$

é chamado de funcional de interação. Fazemos a convenção de que quando  $\nu = 0$ ,  $0 \cdot \infty = 0$ . Note que cometemos um abuso de notação ao identificar  $\mu$  com sua densidade em relação a medida de Lebesgue. Faremos frequentemente tal abuso de notação sem mais comentários. Com respeito à definição dos funcionais, fazemos as seguintes observações:

- Sabemos que cada medida  $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  possui um único representante  $\hat{\mu}$  suportado no conjunto  $[-\pi, \pi)$ . No caso em que  $\mu$  é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, temos que tal representante também é absolutamente contínua, pois conjuntos de medida nula em  $[-\pi, \pi)$  tem por imagem inversa, via a aplicação definida em (2.1.4), um conjunto de medida nula na reta. Deste modo, para que  $\mathcal{U}$  em (2.2.6) esteja bem definida em uma classe de equivalência dada pela relação (2.1.3) basta escolher tal representante.
- No caso do funcional de interação  $\mathcal{W}$ , temos que ele é invariante pela relação (2.1.3), isto é, se  $\mu \sim \mu^*$  então

$$\int_{\mathbb{R}^2} W(x-y) \, d\mu \otimes \mu(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} W(x-y) \, d\mu^* \otimes \mu^*(x, y). \quad (2.2.8)$$

De fato, note que podemos aproximar  $W$  monotonamente por uma sequência de funções contínuas e limitadas nas quais vale a igualdade anterior. Logo, pelo Teorema da convergência monótona, obtemos a invariância desejada.

Sobre o funcional de entropia definido em (2.2.6), temos o seguinte tipo de invariância.

**Lema 2.2.2.** *Seja  $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável com  $U(0) = 0$ ,  $\mu, \rho \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{R})$  tais que  $\mu \sim \rho$ ,  $\mu$  é suportado em  $[a, a + 2\pi)$  e  $\rho$  suportado em  $[b, b + 2\pi)$ . Então, se  $f$  e  $h$  são as densidades de  $\mu$  e  $\rho$ , respectivamente, temos que  $U \circ f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$  se e somente se  $U \circ h \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ , e nesse caso, vale a igualdade*

$$\int_{\mathbb{R}} U \circ f \, dx = \int_{\mathbb{R}} U \circ h \, dx.$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\mu$  é suportada em  $[0, 2\pi)$ . Defina a função  $T : [b, b + 2\pi) \rightarrow [0, 2\pi)$  por

$$T(x) = \begin{cases} x - 2\pi \lfloor \frac{b}{2\pi} \rfloor & \text{se } b \leq x < 2\pi \left(1 + \lfloor \frac{b}{2\pi} \rfloor\right); \\ x - 2\pi \left(1 + \lfloor \frac{b}{2\pi} \rfloor\right) & \text{se } 2\pi \left(1 + \lfloor \frac{b}{2\pi} \rfloor\right) \leq x < b + 2\pi, \end{cases}$$

onde  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota a função maior inteiro. Então, claramente  $T$  é bijetiva e segue da construção que  $T_{\#}\rho \sim \rho$  e  $T_{\#}\rho$  é suportada em  $[0, 2\pi)$ . Desde que existe um único representante de  $\rho$  suportado em  $[0, 2\pi)$ , concluímos que  $T_{\#}\rho = \mu$ . Sejam  $f$  e  $h$  as respectivas densidades de  $\mu$  e  $\rho$ . Então, para qualquer  $\zeta \in C(\mathbb{S}^1)$ , temos

$$\int_{[0, 2\pi)} \zeta(x) h(T^{-1}(x)) dx = \int_{[0, 2\pi)} \zeta(x) f(x) dx.$$

Portanto, obtemos que  $h \circ T^{-1} = f$  em quase todo ponto  $x \in [0, 2\pi)$  e a fórmula de mudança de variável permite obter a identidade desejada.  $\square$

Em geral, o funcional de entropia não é invariante. Com efeito, basta tomar o exemplo  $d\mu = \frac{1}{2\pi} 1_{[0, 2\pi)} dx$  e  $d\mu^* = \frac{1}{2\pi n} 1_{[0, 2\pi n)} dx$  os quais verificam que  $\mu \sim \mu^*$ , porém o funcional  $\mathcal{U}$  assume valores diferentes em cada medida, quando  $n > 1$ .

## 2.3 Domínio dos funcionais

Lembremos que o domínio de um funcional definido em um conjunto qualquer é o subconjunto dos pontos onde o funcional é finito. Em particular, para o nosso funcional temos que o domínio é dado por

$$D(\mathcal{F}_\nu) := \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1) : \mathcal{F}_\nu[\mu] < \infty\}. \quad (2.3.1)$$

Notemos que quando  $\nu > 0$  o domínio do funcional  $\mathcal{F}_\nu$  está contido em  $\mathcal{P}_{ac}(\mathbb{S}^1)$ . Por outro lado, no caso em que  $\nu = 0$ , o funcional se reduz à energia de interação. Note que se  $\mu$  é uma medida de probabilidade que dá massa positiva a pontos, então a medida produto dá massa positiva à diagonal de  $[-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi)$  e portanto o funcional  $\mathcal{W}$  atingirá o valor  $+\infty$ . No entanto, nem sempre o domínio deste funcional contém apenas medidas absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue, como mostra o resultado abaixo. Para um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  denotemos por  $\dim_H(A)$  a dimensão de Hausdorff de  $A$ .

**Proposição 2.3.1.** *O funcional de interação  $\mathcal{W}$  definido em (2.2.7) possui elementos no seu domínio que são singulares com respeito à medida de Lebesgue. Mais ainda, seja  $\alpha^*$  definido como em (13) (veja pag. 33). No caso  $\alpha^* > 0$ , temos que  $\mathcal{W}[\mu] = +\infty$  nas medidas tais que  $\dim_H(\text{Supp}(\mu)) < \alpha^*$ .*

*Demonstração.* Consideremos a medida de Hausdorff  $\mathcal{H}^r$  em  $\mathbb{R}$  definida de tal maneira que  $\mathcal{H}^1$  coincide com a medida de Lebesgue. Escolha um  $s$  com  $\alpha < s < 1$ . É sabido que existem conjuntos tipo Cantor que denotamos por  $\mathbf{C}_s$  em  $[0, \pi]$  tal que  $\mathcal{H}^s(\mathbf{C}_s) = \pi^s$ , para mais detalhes sobre a construção de tais conjuntos e medida de Hausdorff veja [18, pag.

60]. Defina a função de Borel

$$\Phi(\mathbf{C}_s; x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(\mathbf{C}_s \cap (x - r, x + r))}{\omega_s r^s}, \quad (2.3.2)$$

onde  $\omega_s = \pi^{s/2}/\tilde{\Gamma}(1 + s/2)$  com  $\tilde{\Gamma}(t) = \int_0^\infty \tau^{t-1} e^{-\tau} d\tau$  sendo a função Gamma. Por [18, Teorema 6.2] sabemos que

$$\Phi(\mathbf{C}_s; x) \leq 1 < 2,$$

para quase todo  $x \in \mathbb{R}$  em relação à  $\mathcal{H}^s$ . Seja  $B$  o conjunto dos pontos em  $\mathbb{R}$  tais que a desigualdade anterior é válida. Defina agora

$$B_k = \{x \in B : \frac{\mathcal{H}^s(\mathbf{C}_s \cap (x - r, x + r))}{\omega_s r^s} < 2, \forall r \in (0, 1/k)\},$$

com  $k$  inteiro positivo. Note que  $B_k$  é uma sequência crescente de conjuntos tais que  $\cup_k B_k = B$ , logo podemos escolher  $k_0$  inteiro suficientemente grande tal que  $0 < \mathcal{H}^s(B_{k_0} \cap \mathbf{C}_s) \leq \mathcal{H}^s(\mathbf{C}_s) = \pi^s$ . Consideremos a medida finita definida por

$$\mu^s(A) = \mathcal{H}^s(B_{k_0} \cap \mathbf{C}_s \cap A),$$

para todo  $A \subset [-\pi, \pi]$  Boreliano. Note que por definição de  $B_{k_0}$ , vale a seguinte propriedade

$$\mu^s((x - r, x + r)) \leq \mathcal{H}^s(\mathbf{C}_s \cap (x - r, x + r)) \leq 2\omega_s r^s, \quad (2.3.3)$$

para todo  $r \in (0, 1/k_0)$  e  $\mathcal{H}^s$ -q.t.p.  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |x - y|^{-\alpha} d\mu^s(y) &= \int_0^\infty \mu^s([|x - y|^{-\alpha} > t]) dt \\ &= \int_0^\infty \alpha r^{-1-\alpha} \mu^s([|x - y| < r]) dr \\ &= \int_0^\infty \alpha r^{-1-\alpha} \mu^s((x - r, x + r)) dr \\ &\leq \int_0^{1/k_0} 2\omega_s \alpha r^{-1-\alpha+s} dr + \int_{1/k_0}^\infty \pi^s \alpha r^{-1-\alpha} dr \\ &= \frac{2\omega_s \alpha}{s - \alpha} k_0^{\alpha-s} + \pi^s k_0^\alpha. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Finalmente, desde que  $\mu^s$  está suportada em  $[0, \pi)$ , podemos assumir que  $x \in [0, \pi)$ , e então

$$\int_{[0, \pi)} W(x - y) d\mu^s(y) \leq \sup_{0 < t < \pi} t^\alpha W(t) \int_{|x-y| < \pi} |x - y|^{-\alpha} d\mu^s(y).$$

Integrando em relação a  $d\mu^s(x)$  e usando (2.3.4), concluímos com a primeira parte. A segunda é uma consequência da teoria de potencial, veja por exemplo [18, Teorema 8.5, pag.111] e a observação 2.2.1.  $\square$

## 2.4 Semicontinuidade dos funcionais

Nesta seção, analisamos a semicontinuidade inferior dos funcionais envolvidos. Antes de mais nada, lembre que a convergência fraca no espaço  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  é definida por

$$\mu_k \rightharpoonup \mu \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^1} \zeta(x) d\mu_k(x) = \int_{\mathbb{S}^1} \zeta(x) d\mu(x), \quad (2.4.1)$$

para toda  $\zeta \in C(\mathbb{S}^1)$ . É um fato conhecido que a convergência fraca definida acima é, por causa da compacidade de  $\mathbb{S}^1$ , equivalente à convergência induzida pela métrica de Wasserstein periódica definida em (2.1.1).

**Lema 2.4.1.** *O funcional  $\mathcal{F}_\nu$ , definido em (2.2.5)-(2.2.7), é semicontínuo inferiormente em relação à topologia fraca e portanto em relação à métrica de Wasserstein.*

*Demonstração.* Basta mostrar a semicontinuidade inferior dos funcionais  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{F}_0$ .

**Semicontinuidade de  $\mathcal{U}$ :** Considere  $U(t) = t \log(t)$  para  $t \geq 0$  com a convenção natural de que  $U(0) = 0$ . Seja  $\mu_k \rightharpoonup \mu$  uma sequência fracamente convergente. Primeiro observe que podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\mu_k$  é absolutamente contínua para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, denote por  $d\mu_k = \rho_k dx$  as respectivas densidades. Primeiro, analisamos o caso em que  $d\mu = \rho dx$  é também absolutamente contínua. Neste caso, seja  $\eta \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$  uma função não negativa em  $(-\pi, \pi)$  com suporte compacto com massa unitária. Para  $0 < \delta < 1$  defina  $\eta_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \eta(\frac{x}{\delta})$  em  $(-\pi\delta, \delta\pi)$ , e como 0 em  $(-\pi, \pi) \setminus (-\pi\delta, \delta\pi)$ , e estenda periodicamente em  $\mathbb{R}$ . Pela desigualdade de Jensen, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(\rho_k(y)) \eta_\delta(x - y) dy \geq U((\rho_k * \eta_\delta)(x)).$$

Integrando em relação a  $x$ , usando o Teorema de Tonelli e o Lema de Fatou, segue que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{U}[\mu_k] \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} U((\rho_k * \eta_\delta)(x)) dx \quad (2.4.2)$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_{-\pi}^{\pi} \liminf_{k \rightarrow \infty} U((\rho_k * \eta_\delta)(x)) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} U((\rho * \eta_\delta)(x)) dx, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

onde na última igualdade usamos a convergência fraca de  $\mu_k$  e a continuidade de  $U$ . Por outro lado, note que

$$|\rho * \eta_\delta(x) - \rho(x)| \leq \frac{1}{\delta} \|\eta\|_\infty \int_{-\delta\pi}^{\delta\pi} |\rho(x - y) - \rho(x)| dy,$$

e portanto  $(\rho * \eta_\delta)(x) \rightarrow \rho(x)$  nos pontos de Lebesgue de  $\rho$ , isto é, em quase todo ponto. Juntando este último fato, a continuidade da  $U$  e mais uma vez o Lema de Fatou, podemos tomar o limite quando  $\delta \rightarrow 0$  em (2.4.3) para obter a desigualdade desejada.

Agora, assumamos que  $\mu$  não é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Naturalmente,  $\mathcal{U}[\mu] = \infty$ . Considere  $d\mu = \rho \, dx + d\mu_{\text{sing}}$ , a decomposição de Lebesgue de  $\mu$  e  $K \subset \mathbb{S}^1$  o suporte da medida singular  $\mu_{\text{sing}}$ . Logo,  $m := \mu_{\text{sing}}(K) > 0$  e  $|K| = 0$  onde as barras denotam a medida de Lebesgue em  $\mathbb{S}^1$ . Por regularidade das medidas, é possível achar um aberto  $O \subset \mathbb{S}^1$  com medida de Lebesgue arbitrariamente pequena tal que  $K \subset O$ . Assim, pela convergência fraca, temos que  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(O) \geq m > 0$ . Se  $c_0 = \inf_{t \geq 0} U(t)$ , segue da desigualdade de Jensen que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}[\mu_k] - 2\pi c_0 &\geq \int_O (U(\rho_k(x)) - c_0) \, dx \\ &\geq |O| \left( U\left(\frac{\mu_k(O)}{|O|}\right) - c_0 \right). \end{aligned}$$

Note que a função  $\frac{U(t)}{t}$  é crescente e contínua para  $t > 0$ . Portanto, para  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, temos que

$$\mathcal{U}[\mu_k] - 2\pi c_0 \geq \mu_k(O) \frac{2|O|}{m} U\left(\frac{m}{2|O|}\right) - |O|c_0.$$

Tomando o  $\liminf_{k \rightarrow \infty}$  obtemos

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{U}[\mu_k] - 2\pi c_0 \geq 2|O| U\left(\frac{m}{2|O|}\right) - |O|c_0.$$

Desde que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = +\infty$  e  $|O|$  é arbitrariamente pequeno, concluímos a demonstração da semicontinuidade de  $\mathcal{U}$ .

**Semicontinuidade de  $\mathcal{W}$ :** Neste caso considere novamente  $\mu_k \rightharpoonup \mu$  uma sequência convergindo fracamente. Então, o produto  $\mu_k \otimes \mu_k$  certamente converge fracamente para  $\mu \otimes \mu$  (este fato pode ser demonstrado usando um argumento de densidade das funções de variáveis separáveis). Seja  $W_l$  uma sequência monótona crescente de funções contínuas, limitadas e  $2\pi$ -periódicas convergindo para  $W$ . Então, pela convergência fraca, temos que

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{(-\pi, \pi]^2} W(x-y) d\mu_k \otimes \mu_k(x, y) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(-\pi, \pi]^2} W_l(x-y) d\mu_k \otimes \mu_k(x, y) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]^2} W_l(x-y) d\mu \otimes \mu(x, y). \end{aligned}$$

Agora, a semicontinuidade procurada segue pelo Teorema da convergência monótona.  $\square$

## 2.5 Existência de minimizadores

Uma vez que o espaço  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  é compacto, e o funcional  $\mathcal{F}_\nu$  é semicontínuo inferiormente, é imediato que tal funcional é limitado inferiormente e possui pelo menos um minimizador. Explicitamente, temos a seguinte estimativa

$$\nu\mathcal{U}[\mu] \geq -2\pi\nu e^{-1} \text{ e } \mathcal{F}_0[\mu] \geq \frac{1}{2}W(\pi).$$

Logo, tomando uma sequência minimizante  $\mu_k$  que podemos assumir que converge para algum ponto  $\bar{\mu}$ , pela compacidade, temos que  $\bar{\mu}$  é um minimizador já que

$$\inf \mathcal{F}_\nu \leq \mathcal{F}_\nu[\bar{\mu}] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\nu[\mu_k] = \inf \mathcal{F}_\nu.$$

No caso particular do potencial de interação  $\tilde{W}$  definido em (2.2.2), é possível obter explicitamente o minimizador do funcional  $\mathcal{W}$ .

**Proposição 2.5.1.** *Considere o funcional de interação  $\mathcal{W}$  com potencial de interação dado por (2.2.2). Então,  $\mathcal{W}$  possui um único minimizante que é uma medida de probabilidade dada pela medida de Lebesgue normalizada no intervalo  $[-\pi, \pi)$ .*

*Demonstração.* De fato, primeiro considere a aplicação  $E : [-\pi, \pi) \rightarrow \Sigma$  dada por  $E(x) = e^{ix}$ , onde

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Assim, para  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[\mu] &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi)^2} \log \left| \csc \left( \frac{x-y}{2} \right) \right| d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi)^2} \log \left( \frac{2}{|e^{ix/2}e^{-iy/2} - e^{-ix/2}e^{iy/2}|} \right) d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi)^2} \log \left( \frac{2}{|e^{ix} - e^{iy}|} \right) d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma^2} \log \left( \frac{2}{|z - w|} \right) d(E_\# \mu \otimes E_\# \mu)(z, w). \end{aligned}$$

Portanto, minimizar o funcional  $\mathcal{W}$  é o mesmo que minimizar o funcional, assim chamado, de energia logarítmica no círculo no plano complexo. Tal minimizador é amplamente estudado na teoria de potenciais logarítmicos e, em particular, é bem conhecido que o funcional

$$\sigma \in \mathcal{P}(\Sigma) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma^2} \log \left( \frac{2}{|z - w|} \right) d(\sigma \otimes \sigma)(z, w) \in (-\infty, +\infty]$$

admite uma única medida minimizante dada pelo comprimento de arco normalizado, veja

por exemplo [26, pag. 25]. Desde que a aplicação  $E_{\#}$  estabelece uma bijeção entre as respectivas medidas de probabilidade, temos imediatamente que a medida de probabilidade que minimiza  $\mathcal{W}$  é dada pela medida de Lebesgue normalizada no intervalo  $[-\pi, \pi)$ , isto é  $d\bar{\mu} = \frac{1}{2\pi} dx$ .  $\square$

## 2.6 Convexidade dos funcionais

Nesta seção, adaptamos alguns conceitos da teoria clássica no espaço de Wasserstein  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  para o espaço de medidas periódicas  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ . Começamos com a noção de geodésica generalizada, que pode ser dado para qualquer dimensão, mas aqui limitamos o estudo para o caso unidimensional.

Dadas medidas de probabilidade  $\mu_0, \mu_1, \omega \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , sabemos pela seção 2.1 que existem  $\mu_0^* \sim \mu_0$ ,  $\mu_1^* \sim \mu_1$  e planos de transporte  $\gamma_0 \in \Gamma(\omega, \mu_0^*)$  e  $\gamma_1 \in \Gamma(\omega, \mu_1^*)$  tais que vale a identidade (2.1.8), respectivamente, para cada caso. Na definição abaixo  $P_i$ , denota a aplicação projeção na  $i$ -ésima coordenada e  $P_{i,j}$  denota a projeção na  $(i, j)$ -ésimas coordenadas. Com isto em mente, damos o seguinte conceito.

**Definição 2.6.1.** Considere  $\mu_0, \mu_1, \omega \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  e escolha  $\mu_0^*, \mu_1^*, \gamma_0, \gamma_1$  tais que (2.1.8), seja válido. Uma geodésica generalizada ligando  $\mu_0$  com  $\mu_1$  baseada no ponto  $\omega$  e induzida por um 3-plano  $\gamma$ , é uma curva dada pelas classes de equivalência da interpolação  $\mu_t^g = ((1-t)P_2 + tP_3)_{\#}\gamma$ , onde  $\gamma$  é uma medida de probabilidade em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $P_{1,2\#}\gamma = \gamma_0$  e  $P_{1,3\#}\gamma = \gamma_1$ .

*Observação 2.6.2.* Note que  $\mu_t^g$  são medidas de probabilidade que não possuem a priori uma periodicidade. Devido a este fato, consideramos classes de equivalência segundo a relação (2.1.3).

No caso em que  $\omega$ ,  $\mu_0$  e  $\mu_1$  são suportadas em  $(-\pi, \pi]$ , e  $\omega$  não possui átomos, podemos tomar como 3-plano  $\gamma = (I, \widetilde{\mathbf{t}}_{\omega}^{\mu_0}, \widetilde{\mathbf{t}}_{\omega}^{\mu_1})_{\#}\omega$ , onde os mapas  $\widetilde{\mathbf{t}}_{\omega}^{\mu_i}$ ,  $i = 0, 1$ , são construídos como em (2.1.6). Portanto, a geodésica generalizada em  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  é dada pela classe de equivalência de  $\mu_t^g = ((1-t)\widetilde{\mathbf{t}}_{\omega}^{\mu_0} + t\widetilde{\mathbf{t}}_{\omega}^{\mu_1})_{\#}\omega$ .

**Definição 2.6.3.** Dizemos que um funcional  $\mathcal{F} : \mathcal{P}(\mathbb{S}^1) \rightarrow (-\infty, \infty]$  é  $\lambda$ -convexo ao longo de geodésicas generalizadas para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se dados  $\mu_0, \mu_1 \in D(\mathcal{F})$  (o domínio de  $\mathcal{F}$ ) existe um  $\omega \in D(\mathcal{F})$  e uma geodésica generalizada  $\mu_t^g$  ligando  $\mu_0$  com  $\mu_1$ , baseada em  $\omega$  e induzida por um 3-plano  $\gamma$ , tal que

$$\mathcal{F}[\mu_t^g] \leq (1-t)\mathcal{F}[\mu_0] + t\mathcal{F}[\mu_1] - \frac{\lambda}{2}t(1-t)\mathbf{d}_{\gamma}^2(\mu_0^*, \mu_1^*),$$

onde  $\mu_i^* \sim \mu_i$ ,  $i = 0, 1$  e  $\mathbf{d}_{\gamma}^2(\mu_0^*, \mu_1^*) = \int_{\mathbb{R}^3} |x_2 - x_3|^2 d\gamma(x_1, x_2, x_3)$ .

Note que a identidade (2.1.5) implica que, na definição anterior, o termo que mede a convexidade satisfaz  $\mathbf{d}_{\gamma}^2(\mu_0^*, \mu_1^*) \geq \mathbf{d}_2^2(\mu_0^*, \mu_1^*) \geq \mathbf{d}_{per}^2(\mu_0, \mu_1)$ .



**Lema 2.6.4.** *Os seguintes itens são válidos:*

- a) *O funcional de energia  $\mathcal{F}_\nu$  definido em (2.2.5) é estritamente 0-convexo ao longo de geodésicas generalizadas. Desta forma, ele possui um único mínimo.*
- b) *Fixado  $\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , o funcional  $\mu \rightarrow \mathbf{d}_{\text{per}}^2(\omega, \mu)$  é 2-convexo ao longo de geodésicas generalizadas baseadas em  $\omega$ .*

*Demonstração.* Começamos mostrando o item **a)**. Seja  $\omega, \mu_0, \mu_1 \in D(\mathcal{F}_\nu)$  suportadas no intervalo  $[-\pi, \pi)$ . Desde que  $\omega, \mu_0$  e  $\mu_1$  não possuem átomos, como vimos acima, é possível escolher uma geodésica generalizada com representante  $\mu_t^g = ((1-t)\widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_0} + t\widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_1})_\# \omega$ .

Para o funcional de entropia  $\mathcal{U}$  sabemos que  $\omega, \mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{S}^1)$  são absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue. Uma vez que as aplicações de transporte são essencialmente ótimos em relação a métrica euclidiana, por teoria de regularidade de aplicações de transporte, (veja [3, pag. 213]) temos que  $\mu_t^g \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{S}^1)$  é também absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue, além disso devido a (2.1.6) temos que  $\mu_t^g$  é suportada num intervalo do tipo  $[(1-t)a_0 + ta_1, (1-t)a_0 + ta_1 + 2\pi)$ . Agora denotemos por  $f_t$  a densidade de  $\mu_t^g$  em relação à medida de Lebesgue, logo pelo Lema 2.2.2 nós podemos reescrever a entropia na forma clássica

$$\mathcal{U}[\mu_t^g] = \int_{\mathbb{R}} f_t \log(f_t) dx.$$

Logo o resultado recai na convexidade ao longo de geodésicas generalizadas para a entropia definida em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , o espaço de Wasserstein Euclidean, dado no Teorema 1.3.2.

No caso do funcional de interação, lembre que o potencial de interação periódico  $W$  é convexo em cada intervalo  $(-2\pi, 0)$  e  $(0, 2\pi)$  separadamente de acordo com **i)-iii)**. Agora com esta observação em mente podemos mostrar que  $\mathcal{F}_0$  é convexo ao longo de geodésicas generalizadas. Com efeito, pela identidade (2.2.8) temos que,

$$\mathcal{F}_0[\mu_t^g] = \frac{1}{2} \int \int_{[-\pi, \pi)^2} W((1-t)(\widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_0}(x) - \widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_0}(y)) + t(\widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_1}(x) - \widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_1}(y))) d\omega \otimes \omega.$$

Também note que  $(x, y) \in [-\pi, \pi)^2$  implica na relação

$$-2\pi < \widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_i}(x) - \widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_i}(y) < 2\pi, \quad i = 0, 1,$$

E a monotonicidade das aplicações de transporte implica da relação anterior que,  $\widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_0}(x) - \widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_0}(y) \geq 0$  se e somente se  $\widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_1}(x) - \widetilde{\mathbf{t}}_\omega^{\mu_1}(y) \geq 0$  e mais ainda as desigualdade anteriores são estritas fora de um conjunto com  $\omega$ -medida nula. Aplicando então a convexidade de  $W$  em  $(-2\pi, 0)$  e em  $(0, 2\pi)$  separadamente, obtemos o resultado desejado. Agora passamos a mostrar o item **b)**. Fixe  $\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  e considere a função  $\mu \rightarrow \mathbf{d}_{\text{per}}^2(\omega, \mu)$ , para o  $\omega$  dado considere  $\mu_0, \mu_1, \mu_0^*, \mu_1^*$  e  $\gamma$  como na definição 2.6.1 e considere a geodésica generalizada

ligando  $\mu_0$  com  $\mu_1$  baseado em  $\omega$  e induzido por  $\gamma$ . Usando a relação (2.1.8) e o Teorema 1.3.2 (iii), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{per}^2(\omega, \mu_t^g) &\leq \mathbf{d}_2^2(\omega, \mu_t^g) \\ &= (1-t)\mathbf{d}_2^2(\omega, \mu_0^*) + t\mathbf{d}_2^2(\omega, \mu_1^*) - t(1-t)\mathbf{d}_\gamma^2(\mu_0^*, \mu_1^*) \\ &= (1-t)\mathbf{d}_{per}^2(\omega, \mu_0) + t\mathbf{d}_{per}^2(\omega, \mu_1) - t(1-t)\mathbf{d}_\gamma^2(\mu_0^*, \mu_1^*), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

## 2.7 Boa colocação e limite invíscido

Nesta seção, aplicamos o Teorema 1.1.8 do Capítulo 1 para obter o fluxo gradiente métrico que, como será visto, é a solução no sentido distribucional da equação

$$\partial_t \rho - ((W' * \rho)\rho)_x = \nu \partial_{xx} \rho. \quad (2.7.1)$$

Seja  $\tau > 0$ ,  $\nu \geq 0$  e  $\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ . Defina o funcional  $\Psi_\nu(\tau, \mu; \cdot) : \mathcal{P}(\mathbb{S}^1) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  por

$$\Psi_\nu(\tau, \omega; \mu) := \frac{\mathbf{d}_{per}^2(\omega, \mu)}{2\tau} + \mathcal{F}_\nu[\mu], \quad (2.7.2)$$

onde  $\mathbf{d}_{per}$  denota a métrica de Wasserstein periódica definida em (2.1.1) e  $\mathcal{F}_\nu$  é o funcional definido em (2.2.5)-(2.2.7). Dado um  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , pela semicontinuidade do funcional e a métrica, podemos definir a seguinte sequência:  $\mu_{\nu,\tau}^0 = \mu_0$  e dado  $\mu_{\nu,\tau}^{k-1}$ , defina  $\mu_{\nu,\tau}^k$  como o único elemento em  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  tal que

$$\Psi_\nu(\tau, \mu_{\nu,\tau}^{k-1}; \mu_{\nu,\tau}^k) = \min_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)} \Psi_\nu(\tau, \mu_{\nu,\tau}^{k-1}; \mu) \text{ para } k \geq 1. \quad (2.7.3)$$

De fato, a unicidade segue da convexidade mostrada no Lema 2.6.4. Logo, podemos definir as soluções aproximadas

$$\mu_{\nu,\tau}(t) = \mu_{\nu,\tau}^k \text{ para } t \in ((k-1)\tau, k\tau] \text{ e } k \geq 0, \quad (2.7.4)$$

$k \geq 1$  com a convenção de que  $\mu_{\nu,\tau}(0) = \mu_0$ . Com estas construções, passamos a enunciar o resultado de existência e propriedades qualitativas para o fluxo gradiente associado ao funcional  $\mathcal{F}_\nu$ .

**Teorema 2.7.1.** *Seja  $\nu \geq 0$ ,  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  e  $\mathcal{F}_\nu$  o funcional definido em (2.2.5)-(2.2.7). Valem os seguintes itens:*

- (i) *A solução aproximada  $\mu_{\nu,\tau}$  definida em (2.7.4) converge localmente uniformemente quando  $\tau \rightarrow 0$  para uma curva localmente absolutamente contínua, denotada por  $\mu_\nu(\cdot) := S_\nu[\mu_0](\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , chamada de fluxo gradiente de  $\mathcal{F}_\nu$ .*

(ii) A aplicação  $\mu_0 \rightarrow S_\nu[\mu_0](t)$  é 1-lipschitz, isto é, dados  $\mu_0, \omega_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , então

$$\mathbf{d}_{per}(S_\nu[\mu_0](t), S_\nu[\omega_0](t)) \leq \mathbf{d}_{per}(\mu_0, \omega_0).$$

(iii) Se  $\nu > 0$ , então  $\mu_\nu(t) \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{S}^1)$  para todo  $t > 0$ . No caso em que  $\nu = 0$ , se supormos que  $\alpha^* > 0$  é como na Proposição 2.3.1, então a medida  $\mu(t)$  é suportada em conjuntos com dimensão de Hausdorff maior igual do que  $\alpha^*$ . No caso  $\alpha^* = 0$ ,  $\mu(t)$  não dá massa a pontos.

(iv) Seja  $\bar{\mu}_\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  o único ponto que minimiza o funcional  $\mathcal{F}_\nu$ . Então, a função  $t \rightarrow \mathbf{d}_{per}^2(\bar{\mu}_\nu, \mu(t))$  é não crescente. Além disso, a curva  $\mu_\nu$  satisfaz a seguinte condição de decrescimento no funcional

$$\mathcal{F}_\nu[\mu_\nu(t)] - \mathcal{F}_\nu[\bar{\mu}_\nu] \leq \frac{\mathbf{d}_{per}^2(\mu_0, \bar{\mu}_\nu)}{2t} \text{ para todo } t > 0. \quad (2.7.5)$$

(v) A medida  $\bar{\mu}_\nu$  é um fluxo gradiente estacionário, isto é,  $S_\nu[\bar{\mu}_\nu](t) = \bar{\mu}_\nu$  para toda  $t \geq 0$ . Mais ainda, para cada  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  temos que  $S_\nu[\mu_0](t) \rightarrow \bar{\mu}_\nu$  na métrica de Wasserstein quando  $t \rightarrow \infty$ .

(vi) Se  $\mu_0 \in D(\mathcal{F}_\nu)$ , então temos a seguinte estimativa para o erro de convergência

$$\mathbf{d}_{per}^2(\mu_{\nu, \tau}(t), \mu_\nu(t)) \leq \tau \left( \mathcal{F}_\nu[\mu_0] + 2\pi\nu e^{-1} \right). \quad (2.7.6)$$

*Demonstração.* Lembre que já demonstramos que o funcional  $\mathcal{F}_\nu$  é semicontínuo inferiormente no Lema 2.4.1 e a hipótese de convexidade para o funcional  $\Psi_\nu(\tau, \mu; \cdot)$  segue do Lema 2.6.4. Mostremos que nosso funcional de energia é próprio. De fato, tome uma densidade de probabilidade  $\rho$  limitada. É fácil ver que o funcional de entropia é finito. Por outro lado, para o funcional de interação  $\mathcal{W}$ , assumamos sem perda de generalidade que  $W \geq 0$  e que  $\rho$  é uma função  $2\pi$ -periódica tal que

$$\int_{[-\pi, \pi)} \rho(x) \, dx = 1.$$

Então,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(x-y) \rho(y) \rho(x) \, dy \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{x-\pi}^{x+\pi} W(z) \rho(x-z) \, dz \right] \rho(x) \, dx.$$

Logo, usando a condição **(I3)** temos que

$$\begin{aligned}
\int_{x-\pi}^{x+\pi} W(z)\rho(x-z) dz &\leq \int_{-2\pi}^{-\pi} W(z)\rho(x-z) dz + \int_{-\pi}^0 W(z)\rho(x-z) dz \\
&\quad + \int_0^{\pi} W(z)\rho(x-z) dz + \int_{\pi}^{2\pi} W(z)\rho(x-z) dz \\
&\leq 4 \frac{\pi^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|\rho\|_{L^\infty} \sup_{0 < t < \pi} t^\alpha W(t).
\end{aligned}$$

Assim, temos que o funcional  $\mathcal{F}_\nu$  é próprio. Pela seção 2.5, sabemos que o funcional  $\mathcal{F}_\nu$  é limitado inferiormente. Portanto, segue a condição de coercividade. Mais ainda, por um argumento via convolução, podemos aproximar qualquer medida de probabilidade em  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  por medidas absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue com densidade limitada. De fato, considere  $\eta_\epsilon$  uma identidade aproximada positiva e periódica,  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  e uma função teste  $\varphi \in C(\mathbb{S}^1)$ , logo

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\eta_\epsilon * \mu)(x) \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\eta_\epsilon * \varphi(-\cdot))(x) d\mu(x),$$

e a convergência uniforme  $(\eta_\epsilon * \varphi(-x)) \rightarrow \varphi(-x)$  implica a afirmação. Deste modo temos que  $\overline{D(\mathcal{F}_\nu)} = \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ .

Os itens (i), (ii), (iv) e (vi) são consequências diretas do Teorema 1.1.8. O item (iii), para  $\nu > 0$ , segue do fato que  $\mu_\nu(t) \in D(\mathcal{F}_\nu) \subset \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{S}^1)$ . Em quanto que para o caso  $\nu = 0$ , é uma consequência direta da Proposição 2.3.1. Com respeito ao item (v), note que para um dado inicial  $\mu_0 = \bar{\mu}_\nu$  e todo  $\tau > 0$ , temos que

$$\Psi_\nu(\tau, \mu_0; \bar{\mu}_\nu) = \mathcal{F}_\nu[\bar{\mu}_\nu] \leq \Psi_\nu(\tau, \mu_0; \omega),$$

para todo  $\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ . Logo, a sequência discreta definida em (2.7.3) é constante e igual a  $\bar{\mu}_\nu$  para todo  $\tau > 0$ . Portanto, segue que  $S_\nu[\bar{\mu}_\nu](t) = \bar{\mu}_\nu$  para todo  $t \geq 0$ . Para a segunda parte, seja  $t_k \rightarrow \infty$  tal que  $\mu_\nu(t_k)$  converge, devido a compacidade de  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ . Usando (2.7.5), concluímos que  $\lim_{t_k \rightarrow \infty} \mu_\nu(t_k)$  é um minimizador para  $\mathcal{F}_\nu$ . Logo, por unicidade concluímos que  $\lim_{t_k \rightarrow \infty} \mu_\nu(t_k) = \bar{\mu}_\nu$ , o que completa a demonstração.  $\square$

*Observação 2.7.2.* Note que

- A condição **(I3)**, veja pag. 33, que impõe um controle no crescimento de  $W$  na origem, é importante para que o funcional envolvido seja próprio.
- No caso  $\nu = 0$ , o item (iii) pode ser interpretado fisicamente da seguinte maneira: se tomarmos inicialmente uma massa unitária altamente concentrada, então tal massa começa a ser espalhada dependendo do valor de  $\alpha^*$ . Em outras palavras, se diz que o potencial  $W$  é repulsivo.

O próximo passo é mostrar a estabilidade do funcional das curvas  $\mu_\nu(\cdot)$  construídas no teorema anterior em relação ao parâmetro  $\nu \geq 0$  e quando  $\nu \rightarrow 0$ . Mas, antes disso, mostramos um lema que essencialmente é um resultado de  $\Gamma$ -convergência de funcionais. Para uma definição precisa e resultados relacionados veja [2, pag. 331].

*Observação 2.7.3.* Note que o resultado abaixo é trivial se  $\omega \in D(\mathcal{U}) \cap D(\mathcal{W})$  ou se  $\omega \notin D(\mathcal{F}_0)$ . Porém, desde que  $D(\mathcal{U}) \cap D(\mathcal{W}) \subsetneq D(\mathcal{F}_0)$ , como foi mostrado na Proposição 2.3.1, então em geral devemos proceder com um pouco de cuidado.

**Lema 2.7.4.** *Para  $\nu \geq 0$ , considere o funcional  $\mathcal{F}_\nu$  definido em (2.2.5)- (2.2.7). Então, existe  $\nu_0 > 0$  tal que dado  $\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  podemos construir  $\omega_\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , para cada  $0 < \nu \leq \nu_0$ , tal que*

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{F}_\nu[\omega_\nu] = \mathcal{F}_0[\omega] \text{ e } \omega_\nu \rightarrow \omega \text{ quando } \nu \rightarrow 0. \quad (2.7.7)$$

*Demonstração.* Primeiro note que  $D(\mathcal{F}_\nu)$  não depende de  $\nu$ , pois este conjunto é igual a  $D(\mathcal{U}) \cap D(\mathcal{W})$  quando  $\nu > 0$ . Considere  $\eta \in C(\mathbb{S}^1)$  uma função par, não negativa, com  $\|\eta\|_1 = 1$  e com suporte compacto em  $(-\pi, \pi)$ . Agora, defina  $\delta(\nu) = \nu^{1/2}$  e considere a função  $\eta_\nu(x) := \frac{1}{\delta(\nu)} \eta\left(\frac{x}{\delta(\nu)}\right)$  em  $(-\delta(\nu)\pi, \delta(\nu)\pi)$  com extensão por zero até  $[-\pi, \pi]$ . Defina as funções  $w, \varphi_\nu : \mathbb{T}^2 \rightarrow (-\infty, +\infty]$  por  $w(x, y) = W(x - y)$  e  $\varphi_\nu(x, y) = \eta_\nu(x)\eta_\nu(y)$ .

*Passo 1:* A função  $\varphi_\nu * w$  converge para  $w$  quando  $\nu \rightarrow 0$  em subconjuntos compactos do conjunto  $G(\mathbb{T}^2) = \{(x, y) \in [-\pi, \pi]^2 : x \neq y\}$ . Com efeito, seja  $K \subset G(\mathbb{T}^2)$  um subconjunto compacto e  $(x, y) \in K$ . Pela continuidade de  $W$  fora da origem, temos que  $w$  é uniformemente contínua num conjunto compacto  $\tilde{K} \ni K$  tal que  $(x, y) \in K$  implica  $(x - r, y - s) \in \tilde{K}$  com  $(r, s) \in (-\delta(\nu)\pi, \delta(\nu)\pi)^2$  e  $\nu < \nu_0$  com  $\nu_0$  suficientemente pequeno. Assim, dado  $\epsilon > 0$ , diminuindo  $\nu_0$  se necessário, podemos concluir que  $\nu < \nu_0$  implica

$$\begin{aligned} |(\varphi_\nu * w)(x, y) - w(x, y)| &\leq \int_{-\delta_\nu\pi}^{\delta_\nu\pi} \int_{-\delta_\nu\pi}^{\delta_\nu\pi} |w(x - r, y - s) - w(x, y)| \eta_\nu(r) \eta_\nu(s) \, dr \, ds \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova o *passo 1*.

Em vista da observação 2.7.3, basta mostrar o resultado para um  $\omega \in D(\mathcal{W})$ . Considere  $\omega_\nu := \eta_{\delta(\nu)} * \omega$ , onde a convolução é em  $\mathbb{S}^1$ .

*Passo 2:* Vale o seguinte limite

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{W}[\omega_\nu] = \mathcal{W}[\omega].$$

De fato, note que

$$\mathcal{W}[\omega_\nu] = \int_{[-\pi, \pi]^2} (w * \varphi_\nu)(x, y) \, d(\omega \otimes \omega)(x, y). \quad (2.7.8)$$

Uma vez que a diagonal de  $[-\pi, \pi]^2$  possui  $\omega \otimes \omega$ -medida nula o *Passo 1* implica que  $w * \varphi_\nu$  converge para  $w$  em quase todo ponto em relação a  $\omega \otimes \omega$ . Tomando uma perturbação de

$w$ , podemos aplicar o Teorema da convergência dominada em (2.7.8) e obter

$$\begin{aligned}\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{W}[\omega_\nu] &= \int_{G(\mathbb{T}^2)} \lim_{\nu \rightarrow 0} (w * \varphi_\nu)(x, y) \, d(\omega \otimes \omega)(x, y) \\ &= \mathcal{W}[\omega].\end{aligned}$$

*Passo 3* Finalmente, provemos (2.7.7). Note que  $d\omega_\nu = \rho_\nu \, dx$ , onde

$$\begin{aligned}\rho_\nu(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \eta_\nu(x - y) \, d\omega(y) \\ &\leq \nu^{-1/2} \|\eta\|_\infty.\end{aligned}$$

Logo, para algum  $\nu$  suficientemente pequeno, temos que

$$-2\pi\nu e^{-1} \leq \nu \mathcal{U}[\omega_\nu] \leq 2\pi\nu^{1/2} \|\eta\|_\infty \log(\nu^{-1/2} \|\eta\|_\infty) \rightarrow 0 \text{ quando } \nu \rightarrow 0. \quad (2.7.9)$$

Juntando (2.7.9) com o *Passo 2*, (2.7.7) segue imediatamente.  $\square$

Agora, estamos prontos para demonstrar o resultado de estabilidade anunciado. Aqui,  $\nu_0$  denota a mesma constante que no Lema 2.7.4.

**Teorema 2.7.5.** *Assuma que  $0 \leq \nu < \nu_0$ . Denote por  $\mu(\cdot)$  a curva dada pelo Teorema 2.7.1 associada ao funcional  $\mathcal{F}_0$  e por  $\mu_\nu(\cdot)$  a curva associada ao funcional  $\mathcal{F}_\nu$  para  $\nu > 0$ , com o mesmo dado inicial  $\mu_0 \in D(\mathcal{F}_{\nu_0})$ . Então, a curva  $\mu_\nu(\cdot)$  converge localmente uniformemente para a curva  $\mu(\cdot)$  com respeito à métrica de Wasserstein periódica.*

*Demonstração.* Dividimos a prova em alguns passos.

*Passo 1:* Assuma que temos a convergência  $\mu_\nu \rightarrow \mu$  em  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  quando  $\nu \rightarrow 0$ . Para  $\tau > 0$  fixo, denote por  $\mu_{\nu,\tau}$  e  $\mu_\tau$  o único minimizante do funcional  $\Psi_\nu(\tau, \mu_\nu; \cdot)$  e  $\Psi_0(\tau, \mu; \cdot)$ , respectivamente, então  $\mu_{\nu,\tau} \rightarrow \mu_\tau$  em  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , quando  $\nu \rightarrow 0$ . De fato, devido à compacidade do espaço podemos extrair uma sequência  $\nu_k \rightarrow 0$  tal que  $\mu_{\nu_k,\tau} \rightarrow \tilde{\mu}_\tau$  para algum  $\tilde{\mu}_\tau \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ . Agora, para  $\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  fixo, seja  $\omega_\nu$  a sequência dada pelo Lema (2.7.4). Então,

$$\Psi_{\nu_k}(\tau, \mu_{\nu_k}; \mu_{\nu_k,\tau}) \leq \Psi_{\nu_k}(\tau, \mu_{\nu_k}; \omega_{\nu_k}). \quad (2.7.10)$$

Usando o Lema 2.7.4, temos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_{\nu_k}(\tau, \mu_{\nu_k}; \omega_{\nu_k}) = \Psi_0(\tau, \mu; \omega)$ . No lado esquerdo de (2.7.10), temos  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Psi_{\nu_k}(\tau, \mu_{\nu_k}; \mu_{\nu_k,\tau}) \geq \Psi_0(\tau, \mu; \tilde{\mu}_\tau)$ , pela semicontinuidade inferior dos funcionais. Logo

$$\Psi_0(\tau, \mu; \tilde{\mu}_\tau) \leq \Psi_0(\tau, \mu; \omega), \quad (2.7.11)$$

para todo  $\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ . Segue de (2.7.11) e a unicidade do minimizante que  $\tilde{\mu}_\tau = \mu_\tau$ .

*Passo 2:* Considere as soluções aproximadas  $\mu_{\nu,\tau}(\cdot)$  definidas em (2.7.4) para  $\nu \geq 0$ . Então,  $\mu_{\nu,\tau}(\cdot) \rightarrow \mu_{0,\tau}(\cdot)$  localmente uniformemente em  $[0, \infty)$ . De fato, isto é uma consequência imediata de aplicar o *Passo 1* de maneira indutiva para a sequência definida em (2.7.3).

Finalmente, usando o *passo 2* e a estimativa de erro (2.7.6), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{per}(\mu_\nu(t), \mu(t)) &\leq \mathbf{d}_{per}(\mu_\nu(t), \mu_{\nu,\tau}(t)) + \mathbf{d}_{per}(\mu_{\nu,\tau}(t), \mu_\tau(t)) + \mathbf{d}_{per}(\mu_\tau(t), \mu(t)) \\ &\leq \tau^{1/2}(\mathcal{F}_\nu[\mu_0] + 2\pi\nu e^{-1})^{1/2} + \mathbf{d}_{per}(\mu_{\nu,\tau}(t), \mu_\tau(t)) + \tau^{1/2}\mathcal{F}_\nu[\mu_0]^{1/2}. \end{aligned}$$

Tomando limite quando  $\nu \rightarrow 0$  e depois quando  $\tau \rightarrow 0$ , segue a conclusão.  $\square$

## 2.8 Soluções no sentido distribucional

Nesta seção, mostramos que o fluxo gradiente métrico dado pelo Teorema 2.7.1 é de fato uma solução em sentido distribucional da equação (2.7.1). Por completude, mostramos uma caracterização das curvas absolutamente contínuas no espaço  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ . Aqui devemos lembrar a relação de equivalência definida em (2.1.5) e denotamos por  $[\sigma] \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  a classe de equivalência de um elemento  $\sigma \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 2.8.1.** *Seja  $a < b$ ,  $[\sigma](\cdot) : (a, b) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  uma curva em  $AC^2(a, b; \mathcal{P}(\mathbb{S}^1))$ . Então, existe um campo de velocidades Borel mensurável  $v : (a, b) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $v_t := v(t, \cdot) \in \overline{C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})}^{L^2(\sigma_t)}$ ,  $\|v_t\|_{L^2(\sigma_t)} \leq |[\sigma]'_t|$ , e a equação de continuidade periódica é válida, isto é,*

$$\int_a^b \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \phi(t, x) + \nabla_x \phi(t, x) v(t, x)) d\sigma_t(x) dt = 0, \quad (2.8.1)$$

para cada  $\phi \in C_c^\infty((a, b) \times \mathbb{S}^1)$ . Mais ainda, o campo  $v$  satisfaz a igualdade  $\|v_t\|_{L^2(\sigma_t)} = |[\sigma]'_t|$ .

*Demonstração.* Lembre que para cada  $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , denotamos por  $\tilde{\mu}$  o único representante de  $[\mu]$  suportado em  $[-\pi, \pi)$ . Seja  $s, t \in (a, b)$  e  $\gamma_{s,t} \in \Gamma_{per}(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_t)$  um plano de transporte ótimo no problema de Monge-Kantorovich (2.1.1). Então,

$$|\sigma_s(\phi) - \sigma_t(\phi)| = \left| \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} (\phi(x) - \phi(y)) d\gamma_{s,t} \right| \leq \text{Lip}(\phi) \mathbf{d}_{per}(\mu_s, \mu_t),$$

para toda  $\phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ , onde temos usado que a métrica periódica em  $\mathbb{S}^1$  coincide localmente com a métrica Euclidiana. Para estimar com mais precisão a derivada da função acima, definimos

$$H_{per}(x, y) := \begin{cases} \frac{\phi(x) - \phi(y)}{d_{per}(x, y)} & \text{se } x - y \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ \phi'(x) & \text{se } x - y \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Claramente  $H_{per}$  pode ser visualizada como uma função contínua periódica de período  $2\pi$  em cada variável. Logo, podemos estimar

$$\frac{|\sigma_{t+h}(\phi) - \sigma_t(\phi)|}{|h|} \leq \frac{\mathbf{d}_{per}(\sigma_{t+h}, \sigma_t)}{|h|} \left( \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} H_{per}^2(x, y) d\gamma_{t+h,t}(x, y) \right)^{1/2}. \quad (2.8.2)$$

Note que, quando  $h \rightarrow 0$ , o primeiro fator do lado direito de (2.8.2) vai para  $|[\sigma]'(t)$

enquanto o segundo fator converge para  $\int_{\mathbb{S}^1} (\phi')^2(x) d\tilde{\sigma}(x) = \int_{\mathbb{R}} (\phi'(x))^2 d\sigma(x)$ , devido à estabilidade dos planos de transporte. Isto se traduz em

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|\sigma_{t+h}(\phi) - \sigma_t(\phi)|}{|h|} \leq \|[\sigma]'\|(t) \|\phi'\|_{L^2(\sigma_t)}. \quad (2.8.3)$$

Defina a medida finita  $\mu := \int \sigma_t dt$  no conjunto  $(a, b) \times \mathbb{R}$ , e tome  $\phi \in C^\infty((a, b) \times \mathbb{S}^1)$ . Logo, pelo Teorema da convergência dominada temos

$$\begin{aligned} \int_{(a,b) \times \mathbb{S}^1} \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, x) d\mu(s, x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{(a,b) \times \mathbb{S}^1} \frac{\phi(s+h, x) - \phi(s, x)}{h} d\mu(s, x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\sigma_{s-h}(\phi(s, x)) - \sigma_s(\phi(s, x))}{h} ds \\ &\leq \left( \int_a^b \|[\sigma]'\|^2(s) ds \right)^{1/2} \left( \int_{(a,b) \times \mathbb{S}^1} |\partial_x \phi(s, \cdot)|^2 d\mu(s, x) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (2.8.3). Portanto, a última desigualdade implica que o funcional linear definido por

$$L(\partial_x \phi) = - \int_{(a,b) \times \mathbb{S}^1} \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, x) d\mu(s, x),$$

é contínuo e pode ser estendido para um funcional  $L : \overline{\{\partial_x \phi : \phi \in C^\infty((a, b) \times \mathbb{S}^1)\}}^{L^2(\mu)} \rightarrow \mathbb{R}$  de maneira contínua. Logo, pelo Teorema da representação de Riesz, temos que existe um  $v \in \overline{\{\partial_x \phi : \phi \in C^\infty((a, b) \times \mathbb{S}^1)\}}^{L^2(\mu)}$  tal que

$$L(w) = \int_{(a,b) \times \mathbb{S}^1} v(s, x) w(s, x) d\mu(s, x).$$

Claramente, tal  $v$  é o procurado no enunciado do teorema.  $\square$

A partir de agora, omitimos na notação a dependência da curva dada pelo Teorema 2.7.1 com respeito ao parâmetro  $\nu \geq 0$ . Dizemos que uma curva  $\mu_t : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  é uma solução no sentido de distribuições para (2.7.1) com dado inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , se para toda  $\phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$  a equação

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{S}^1} \phi d\mu_t(x) = \nu \int_{\mathbb{S}^1} \phi''(x) d\mu_t(x) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} W'(x-y) (\phi'(x) - \phi'(y)) d\mu_t \otimes \mu_t(x, y) \quad (2.8.4)$$

é válida no sentido de distribuições em  $(0, \infty)$  e  $\mu_t \rightarrow \mu_0$  na topologia fraca de medidas.

Desde que a curva  $\mu_t$  (dada pelo Teorema 2.7.1) é localmente absolutamente contínua em  $(0, \infty)$ , o Teorema 2.8.1 garante que  $\mu_t$  já satisfaz a equação de continuidade (2.8.1) no sentido de distribuições para uma certa função boreliana  $v$  como no teorema anterior. Por outro lado, podemos dar a noção de subdiferencial para o caso periódico da seguinte forma.



**Definição 2.8.2.** Considere um funcional  $\mathcal{F} : \mathcal{P}(\mathbb{S}^1) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  e um elemento  $\sigma \in \text{Dom}(\mathcal{F})$  que, por simplicidade, assumimos que não dá massa a pontos. Dizemos que  $v \in L^2(\sigma, \mathbb{S}^1)$  está na subdiferencial  $\partial\mathcal{F}[\sigma]$  se

$$\mathcal{F}[\omega] - \mathcal{F}[\sigma] \geq \int_{(-\pi, \pi]} v(x)(\widetilde{\mathbf{t}}_\sigma^\omega(x) - x) d\sigma(x) + o(\mathbf{d}_{\text{per}}(\sigma, \omega)), \quad (2.8.5)$$

onde  $\widetilde{\mathbf{t}}_\sigma^\omega$  é a aplicação construída em (2.1.6).

Analogamente ao caso Euclidiano, podemos mostrar que o conjunto  $\partial\mathcal{F}(\sigma)$  é convexo fechado e possui um único elemento de norma minimal, denotado por  $\partial^\circ\mathcal{F}[\sigma]$ , tal que

$$\|\partial^\circ\mathcal{F}[\sigma]\|_{L^2(\sigma)} = |\partial\mathcal{F}|(\sigma),$$

onde  $|\partial\mathcal{F}|(\sigma)$  denota a inclinação local dada a definição 1.1.5.

Além disso, os mesmos argumentos que demonstram a regra da cadeia no Teorema 1.3.7 para o caso não periódico permitem obter uma versão da regra da cadeia no caso periódico. Portanto, usando a identidade de energia, cuja versão mais geral pode ser encontrada no Teorema 3.6.4, e a regra da cadeia, concluímos que o campo associado à curva dada pelo Teorema 2.7.1 satisfaz a identidade

$$v(t, \cdot) = -\partial^\circ\mathcal{F}_\nu[\mu_t], \text{ para } \mu_t - \text{q.t.p.}$$

Assim, o nosso próximo objetivo é caracterizar o elemento de norma minimal na subdiferencial  $\partial\mathcal{F}$ , isto é, a função  $\partial^\circ\mathcal{F}_\nu[\mu_t]$ . Primeiro mostramos um lema técnico.

**Lema 2.8.3.** *Considere um funcional linear  $L : C^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$|L(\phi)| \leq C\|\phi'\|_\infty. \quad (2.8.6)$$

*Então, existe uma medida de Radon  $\xi \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^1)$  tal que*

$$L(\phi) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi'(x) d\xi(x).$$

*Demonstração.* Denotemos por  $C_m^k(\mathbb{S}^1)$  o conjunto das funções periódicas de classe  $C^k$  com média zero, isto é, as  $\phi \in C^k(\mathbb{S}^1)$  tais que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) dx = 0.$$

No caso  $k = 0$  omitimos o sobrescrito. Primeiro note que a condição (2.8.6) implica que

$$L(K) = 0 \text{ para toda } K \in \mathbb{R}. \quad (2.8.7)$$

Considere o operador  $T_1 : C(\mathbb{S}^1) \rightarrow C_m(\mathbb{S}^1)$ , dado por

$$T_1(\phi) = \phi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi \, dx,$$

e note que  $\|T_1(\phi)\|_{\infty} \leq 2\|\phi\|_{\infty}$ . Defina também  $T_2 : C_m(\mathbb{S}^1) \rightarrow C^1(\mathbb{S}^1)$  por

$$T_2(\phi)(x) = \begin{cases} \int_{-\pi}^x \phi(y) \, dy & \text{se } x \in [-\pi, \pi), \\ T_2(\phi)(x + 2\pi) = T_2(\phi)(x), \end{cases}$$

onde  $\|T_2(\phi)\|_{\infty} + \|T_2(\phi)'\|_{\infty} \leq (2\pi + 1)\|\phi\|_{\infty}$ . Agora, definimos o operador  $\tilde{L} : C(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\tilde{L} = L \circ T_2 \circ T_1$  que satisfaz a desigualdade

$$|\tilde{L}(\phi)| \leq 2C(2\pi + 1)\|\phi\|_{\infty},$$

para toda  $\phi \in C(\mathbb{S}^1)$ . Assim,  $\tilde{L}$  é contínua, portanto, pelo Teorema da representação de Riesz, sabemos que existe uma medida de Radon  $\xi \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^1)$  tal que

$$\tilde{L}(\phi) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi(x) \, d\xi(x),$$

para toda  $\phi \in C(\mathbb{S}^1)$ . Finalmente, considerando o operador derivação  $C^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow C(\mathbb{S}^1)$ , temos que

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\phi') &= L(T_2(T_1(\phi'))) = L\left(T_2\left(\phi' - \frac{1}{2\pi}(\phi(\pi) - \phi(-\pi))\right)\right) \\ &= L(\phi - \phi(-\pi)) = L(\phi), \end{aligned}$$

onde na última linha temos usado (2.8.7). Isto conclui a demonstração.  $\square$

Continuando com a nossa análise, para uma medida  $\mu \in \text{Dom}(\mathcal{W})$ , definimos o funcional linear  $L_{\mu} : C^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$L_{\mu}(\phi) = \int_{[-\pi, \pi)^2} W'(x - y)(\phi(x) - \phi(y)) \, d(\mu \otimes \mu)(x, y). \quad (2.8.8)$$

Denotemos por  $A := ([|x - y| < \epsilon] \cup [|x - y - 2\pi| < \epsilon] \cup [|x - y + 2\pi| < \epsilon])^c \subset [-\pi, \pi)^2$ .

Então,

$$\begin{aligned}
|L_\mu(\phi)| &\leq \int_{||x-y|<\epsilon]} |W'(x-y)(\phi(x) - \phi(y))| d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\
&\quad + \int_{||x-y-2\pi|<\epsilon]} |W'(x-y)(\phi(x) - \phi(y))| d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\
&\quad + \int_{||x-y+2\pi|<\epsilon]} |W'(x-y)(\phi(x) - \phi(y))| d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\
&\quad + \int_A |W'(x-y)(\phi(x) - \phi(y))| d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\
&=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Assim, usando (2.2.4), podemos estimar

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \|\phi'\|_\infty \sup_{0 < t < \pi} |t^{1+\alpha^*} W'(t)| \int_{||x-y|<\epsilon]} |x-y|^{-\alpha^*} d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\
&\leq \|\phi'\|_\infty \frac{\sup_{0 < t < \pi} |t^{1+\alpha^*} W'(t)|}{\inf_{0 < t < \epsilon} t^{\alpha^*} W(t)} \int_{||x-y|<\epsilon]} W(x-y) d(\mu \otimes \mu)(x, y),
\end{aligned}$$

onde a última expressão é finita desde que  $\mu \in \text{Dom}(\mathcal{W})$ . Similarmente,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \|\phi'\|_\infty \sup_{0 < t < \pi} |t^{1+\alpha^*} W'(t)| \int_{||x-y-2\pi|<\epsilon]} |x-y-2\pi|^{-\alpha^*} d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\
&\leq \|\phi'\|_\infty \frac{\sup_{0 < t < \pi} |t^{1+\alpha^*} W'(t)|}{\inf_{0 < t < \epsilon} t^{\alpha^*} W(t)} \int_{||x-y-2\pi|<\epsilon]} W(x-y) d(\mu \otimes \mu)(x, y).
\end{aligned}$$

As mesmas estimativas seguem para  $I_3$ . Além disso,  $I_4$  pode ser estimado de maneira mais direta já que o integrando é limitado no conjunto  $A$ . Em resumo, obtemos que

$$|L_\mu(\phi)| \leq C \|\phi'\|_\infty,$$

onde  $C = C(W) > 0$  depende apenas de  $W$ . Como uma consequência das estimativas anteriores, chegamos ao próximo lema.

**Lema 2.8.4.** *Considere o funcional linear  $L_\mu$  definido em (2.8.8), com  $\mu \in \text{Dom}(\mathcal{W})$ . Então, existe uma medida de Radon  $\xi_\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^1)$  tal que*

$$L_\mu(\phi) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi'(x) d\xi_\mu(x).$$

A prova é uma consequência direta do Lema 2.8.3. A seguir damos uma caracterização da subdiferencial do funcional de energia.

**Lema 2.8.5.** *Seja  $\nu \geq 0$  e  $\mathcal{F}_\nu$ , o funcional definido em (2.2.5), e  $\mu \in \text{Dom}(\mathcal{F}_\nu)$ . Se  $\mu \in \text{Dom}(|\partial \mathcal{F}_\nu|)$ , então existe  $\theta \in L^2(\mathbb{S}^1, d\mu)$  tal que*

$$\theta \mu = \frac{d}{dx}(\nu \mu - \frac{1}{2} \xi_\mu), \quad (2.8.9)$$

onde  $\xi_\nu$  é a medida de Radon dada no Lema 2.8.4. O campo de velocidade  $\theta$  é a seleção minimal na subdiferencial  $\partial\mathcal{F}_\nu[\mu]$ . Mais ainda, quando  $\nu > 0$ , temos que  $\nu\mu - \xi_\nu \in W^{1,1}(\mathbb{S}^1, dx)$ , onde  $dx$  denota a medida de Lebesgue em  $[-\pi, \pi) \equiv \mathbb{S}^1$ .

*Demonstração.* Seja  $\phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$  e para  $0 < \epsilon < \text{Lip}(\phi)^{-1}$  defina  $r_\epsilon(x) := x + \epsilon\phi(x)$ . Note que  $r_\epsilon(\pi) = 2\pi + r_\epsilon(-\pi)$  e que  $x - y > 0$  implica  $r_\epsilon(x) - r_\epsilon(y) \geq (x - y) - \epsilon\text{Lip}(\phi)(x - y) > 0$ . Em particular, podemos ver  $r_\epsilon$  como uma aplicação de  $\mathbb{S}^1$  em si mesmo e que satisfaz  $-2\pi < r_\epsilon(x) - r_\epsilon(y) < 2\pi$ . Agora, sabemos que  $\mu \otimes \mu$  não dá medida positiva à diagonal de  $[-\pi, \pi)^2$ , portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon}(\mathcal{W}[r_{\epsilon\#}\mu] - \mathcal{W}[\mu]) &= \frac{1}{2} \int \int_{[x>y] \cap [-\pi, \pi)^2} \frac{W(r_\epsilon(x) - r_\epsilon(y)) - W(x - y)}{\epsilon} d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \int_{[x<y] \cap [-\pi, \pi)^2} \frac{W(r_\epsilon(x) - r_\epsilon(y)) - W(x - y)}{\epsilon} d(\mu \otimes \mu)(x, y). \end{aligned}$$

Note que as expressões em cada integral são monótonas não decrescentes, devido à convexidade de  $W$  em  $(-2\pi, 0)$  e em  $(0, 2\pi)$ , respectivamente. Assim, pelo Teorema da convergência monótona temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}(\mathcal{W}[r_{\epsilon\#}\mu] - \mathcal{W}[\mu]) &= \frac{1}{2} \int \int_{[-\pi, \pi)^2} W'(x - y)(\phi(x) - \phi(y)) d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\ &= \frac{1}{2} L_\mu(\phi). \end{aligned} \tag{2.8.10}$$

Por outro lado, para  $\nu > 0$ , veja que  $r_{\epsilon\#}\mu$  está suportado em  $[r_\epsilon(-\pi), r_\epsilon(-\pi) + 2\pi)$  e é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue com densidade dada por

$$f_\epsilon(x) = \frac{f(r_\epsilon^{-1}(x))}{1 + \epsilon\phi'(r_\epsilon^{-1}(x))},$$

onde  $f$  denota a densidade de  $\mu$  em relação a medida de Lebesgue. Deste modo

$$\frac{1}{\epsilon}(\mathcal{U}[r_{\epsilon\#}\mu] - \mathcal{U}[\mu]) = - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\epsilon} (\log(1 + \epsilon\phi'(x))) dx,$$

e portanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}(\mathcal{U}[r_{\epsilon\#}\mu] - \mathcal{U}[\mu]) = - \int_{-\pi}^{\pi} \phi'(x) d\mu. \tag{2.8.11}$$

Lembrando que localmente a distância em  $\mathbb{S}^1$  coincide com a distância Euclidiana, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{[-\pi, \pi)} \phi'(x) d\xi_\mu(x) - \nu \int_{-\pi}^{\pi} \phi'(x) d\mu &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\mathcal{F}_\nu(r_{\epsilon\#}\mu) - \mathcal{F}_\nu(\mu)] \\ &\geq -|\partial\mathcal{F}_\nu|(\mu) \|\phi\|_{L^2(\mu)}, \end{aligned}$$

e, trocando  $\phi$  por  $-\phi$ , segue que

$$\left| \frac{1}{2} \int_{[-\pi, \pi)} \phi'(x) d\xi_\mu(x) - \nu \int_{[-\pi, \pi)} \phi'(x) d\mu \right| \leq |\partial \mathcal{F}_\nu|(\mu) \|\phi\|_{L^2(\mu)}.$$

Pelo Teorema de representação de Riesz, existe um  $\theta \in L^2(\mu)$  satisfazendo (2.8.9) e  $\|\theta\|_{L^2(\mu)} \leq |\partial \mathcal{F}_\nu|(\mu)$ . Note que este fato também implica que a derivada distribucional aparecendo em (2.8.9) é de fato uma função quando  $\nu > 0$ . Resta mostrar que  $\theta$  está de fato na subdiferencial de  $\mathcal{F}_\nu$  segundo a definição 2.8.2. De fato, para  $\sigma \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , usando a convexidade mostrada no Lema 2.6.4 e um argumento similar ao cálculo das derivadas direcionais (porém mais técnico), podemos estimar

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu[\sigma] - \mathcal{F}_\nu[\mu] &\geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_\nu[\mu_t^g] - \mathcal{F}_\nu[\mu]}{t} \\ &\geq \int_{[-\pi, \pi)} \frac{d}{dx} \left( \nu \mu - \frac{1}{2} \xi_\mu \right) (\widetilde{\mathbf{t}}_\mu^\sigma(x) - x) dx \\ &= \int_{[-\pi, \pi)} \theta(x) (\widetilde{\mathbf{t}}_\mu^\sigma(x) - x) d\mu, \end{aligned}$$

onde usamos a geodésica generalizada baseada no ponto  $\mu$ . □

Agora, estamos prontos para mostrar que o fluxo gradiente dado pelo Teorema 2.7.1 é uma solução de (2.7.1) no sentido de (2.8.4).

**Teorema 2.8.6.** *Seja  $\nu \geq 0$  e  $\mathcal{F}_\nu$  o funcional definido em (2.2.5)-(2.2.7). Para  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ , denotamos por  $\mu_t$  a curva em  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  dada pelo Teorema 2.7.1 com dado inicial  $\mu_0$ . Então,  $\mu_t$  é uma solução de (2.7.1) no sentido distribucional (2.8.4). Mais ainda, se  $\nu > 0$ , temos que*

$$\mu_t \in L_{loc}^1((0, \infty); BV(\mathbb{S}^1, dx)) \quad (2.8.12)$$

$$\nu \mu_t - \xi_{\mu_t} \in W^{1,1}(\mathbb{S}^1, dx), \text{ para toda } t > 0, \quad (2.8.13)$$

onde  $dx$  denota a medida de Lebesgue em  $[-\pi, \pi) \equiv \mathbb{S}^1$  e  $\xi_{\mu_t}$  denota a medida de Radon construída no Lema 2.8.4.

*Demonstração.* Primeiro mostramos que tal curva satisfaz (2.8.4). Seja  $\eta \in C^\infty(0, \infty)$  e  $\phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ , então pelo Teorema 2.8.1 e a análise depois da definição 2.8.2 (pagina 49) sabemos que  $\mu_t$  satisfaz

$$\int_0^\infty \int_{[-\pi, \pi)} \eta'(t) \phi(x) d\mu_t dt = \int_0^\infty \eta(t) \int_{[-\pi, \pi)} \phi'(x) \theta(t, x) d\mu_t dt,$$

onde  $\theta(t, x)$  denota a função dada em (2.8.9). Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi, \pi)} \phi'(x) \theta(t, x) d\mu_t &= \int_{[-\pi, \pi)} \phi'(x) d(\nu\mu_t - \frac{1}{2}\xi_{\mu_t})' \\
&= -\nu \int_{[-\pi, \pi)} \phi''(x) d\mu_t + \frac{1}{2} \int_{[-\pi, \pi)} \phi''(x) d\xi_{\mu_t} \\
&= -\nu \int_{[-\pi, \pi)} \phi''(x) d\mu_t \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{[-\pi, \pi)^2} W'(x-y)(\phi'(x) - \phi'(y)) d(\mu_t \otimes \mu_t)(x, y).
\end{aligned}$$

Daqui segue imediatamente (2.8.4). Agora, para  $\nu > 0$ , mostremos (2.8.12). Seja  $\phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ , então

$$\begin{aligned}
\nu \int_{[-\pi, \pi)} \phi'(x) d\mu_t &= - \int_{[-\pi, \pi)} \phi(x) d(\nu\mu_t - \frac{1}{2}\xi_{\mu_t})'(x) + \int_{[-\pi, \pi)} \phi'(x) \frac{1}{2} d\xi_{\mu_t}(x) \\
&= - \int_{[-\pi, \pi)} \phi(x) \theta(t, x) d\mu_t(x) + \int_{[-\pi, \pi)} \phi'(x) \frac{1}{2} d\xi_{\mu_t}(x) \\
&\leq \|\phi\|_\infty |\partial\mathcal{F}_\nu|(\mu_t) + \frac{C(W)}{2} \|\phi'\|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada distribucional de  $\mu_t$  é dada por uma medida de Radon finita em  $\mathbb{S}^1$  e

$$\|\partial_x \mu_t\|_{BV} \leq |\partial\mathcal{F}_\nu|(\mu_t) + \frac{C(W)}{2},$$

donde segue (2.8.12). Finalmente, (2.8.13) é uma consequência direta do Lema 2.8.5.  $\square$

## 2.9 Aplicações

Agora, damos dois exemplos de potenciais de interação que satisfazem as condições (I1)-(I3).

**Potencial Logarítmico:** O primeiro e principal exemplo é dado pelo potencial definido em (2.2.2), isto é,

$$\tilde{W}(x) = -\frac{1}{\pi} \log |\sin(x/2)|,$$

para  $x \neq 0$ . Como vimos na seção 2.2 este potencial está associado à equação

$$\partial_t \mu + \partial_x (H(\mu)\mu) = \nu \partial_{xx} \mu,$$

onde  $H(\mu)$  denota a transformada de Hilbert (2.0.2). Note que (I1) e (I2) são imediatamente verificáveis, por outro lado note que (2.2.3) é válida para toda  $\alpha \in (0, 1)$  e portanto (2.2.4) é satisfeita com  $\alpha^* = 0$ . Note também que neste caso, a curva dada pelo Teorema

2.7.1 satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{S}^1} \phi \, d\mu_t(x) = \nu \int_{\mathbb{S}^1} \phi''(x) \, d\mu_t(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} \cot\left(\frac{x-y}{2}\right) (\phi'(x) - \phi'(y)) \, d(\mu_t \otimes \mu_t)(x, y),$$

para toda  $\phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ .

Mais ainda, no caso  $\nu = 0$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^1} \zeta \, d\mu_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta(x) \, dx,$$

devido ao item (v) do Teorema 2.7.1. Em particular, para qualquer intervalo  $I \subset [-\pi, \pi)$ , temos que

$$\frac{1}{2\pi} |I| \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mu_t(I) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mu_t(I) \leq \frac{1}{2\pi} |I|,$$

onde as barras  $|\cdot|$  denotam a medida de Lebesgue do intervalo  $I$ . Este último fato pode ser interpretado como uma propriedade de regularidade da equação (2.0.1). Do ponto de vista físico também poderíamos fazer a seguinte interpretação: assuma que a temperatura está inicialmente concentrada num ponto (como um delta de Dirac), se a temperatura é governada pela equação (2.0.1) então, pelas proposições 2.3.1 e 2.5.1, temos que existe uma propagação do calor pelo menos num sentido fraco e que quando o tempo cresce a temperatura tende a ser homogênea.

**Potenciais singulares:** Um outro exemplo a ser considerado é

$$W(x) = |\csc(x/2)|^{-s},$$

para  $x \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e com  $s \in (0, 1)$  fixo. Uma motivação para considerar tal potencial de interação é que ao menos do ponto de vista heurístico, este pode ser visto como o análogo periódico do potencial  $|x|^{-s}$  no caso de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Novamente, é imediato verificar as condições (I1), (I2), em quanto que (2.2.3) é verificada para  $\alpha \in [s, 1)$  e portanto (2.2.4) é válida para  $\alpha^* = s$ . Neste caso, notamos que a curva dada pelo Teorema 2.7.1 satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{S}^1} \phi \, d\mu_t(x) &= \nu \int_{\mathbb{S}^1} \phi''(x) \, d\mu_t(x) \\ &\quad - s \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1} |\csc\left(\frac{x-y}{2}\right)|^{-s} \cot\left(\frac{x-y}{2}\right) (\phi'(x) - \phi'(y)) \, d(\mu_t \otimes \mu_t)(x, y), \end{aligned}$$

para toda  $\phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ . A Proposição 2.3.1 implica que a velocidade de propagação da equação (2.7.1) com  $\nu = 0$  é maior do que a velocidade de propagação para o caso do potencial logarítmico, sem que isto implique necessariamente numa maior regularidade assintótica.

## Capítulo 3

# Fluxo Gradiente Dependendo do Tempo

Neste capítulo, estendemos os resultados da teoria métrica de fluxos gradientes de [3] para o caso de um funcional que depende do tempo. De fato, estamos interessados em estudar o análogo métrico do sistema não autônomo

$$u'(t) = -\nabla \mathcal{E}(t, u(t)), \quad (3.0.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (3.0.2)$$

onde o operador gradiente é tomado com relação à variável espacial. Tal sistema é bem entendido em um contexto Euclidiano e com regularidade suficiente no funcional  $\mathcal{E}$ . Em [24] é abordado um sistema duplamente não linear generalizando (3.0.1) e com a hipótese de limitação inferior no funcional  $\mathcal{E}$  e um certo controle da derivada temporal dos funcionais. Os funcionais a serem considerados aqui podem não ser limitados inferiormente. Além disso, trabalhamos sob hipóteses de convexidade que varia de acordo com o tempo.

### 3.1 Formulação Métrica

Considere  $(X, d)$  um espaço métrico separável e completo, e  $\mathcal{E} : [0, \infty) \times X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  um funcional. É bem conhecido que o sistema (3.0.1) admite uma reformulação puramente métrica, o que lhe permite ser estudado em espaços métricos abstratos. De fato, temos que (3.0.1) é formalmente equivalente a

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}(t, u(t))) = \partial_t \mathcal{E}(t, u(t)) - |\nabla \mathcal{E}(t, u(t))| |u'(t)| \quad (3.1.1)$$

$$|u'(t)| = |\nabla \mathcal{E}(t, u(t))|. \quad (3.1.2)$$



Por sua vez, podemos reescrever (3.1.1)-(3.1.2) como

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}(t, u(t))) \leq \partial_t \mathcal{E}(t, u(t)) - \frac{1}{2} |\nabla \mathcal{E}(t, u(t))|^2 - \frac{1}{2} |u'(t)|^2. \quad (3.1.3)$$

De fato, a desigualdade anterior torna-se uma igualdade graças à desigualdade de Young, donde segue a equivalência.

Uma vez que curvas absolutamente contínuas possuem derivada no sentido métrico, o ultimo termo do lado direito de (3.1.3) pode ser facilmente interpretado no sentido métrico. Assim, no intuito de dar um sentido puramente métrico a (3.1.3), pode-se substituir o módulo do gradiente pela inclinação local dada na definição 1.1.5. Assim, adotamos como formulação métrica para equação (3.0.1) a desigualdade

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}(t, u(t))) \leq \partial_t \mathcal{E}(t, u(t)) - \frac{1}{2} |\partial \mathcal{E}(t)|^2(u(t)) - \frac{1}{2} |u'|^2(t), \quad (3.1.4)$$

onde  $|\partial \mathcal{E}(t)|$  denota a inclinação local do funcional  $u \rightarrow \mathcal{E}(t, u)$ .

Vamos assumir que o funcional  $\mathcal{E}$  satisfaz um conjunto de condições gerais e que irão permitir a boa colocação do problema (3.0.1)-(3.1.1).

Assumimos que:

- E1.-** Para cada  $t \geq 0$ , o funcional  $\mathcal{E}(t, \cdot)$  é próprio e semicontínuo inferiormente em relação à métrica  $d$ .
- E2.-** O conjunto  $\mathbf{D} := \text{Dom}(\mathcal{E}(t, \cdot))$  não depende de  $t$ .
- E3.-** Existe  $u^* \in X$  e uma função  $\beta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\beta \in L^1_{loc}([0, \infty))$  tal que, para cada  $u \in \mathbf{D}$ , a função  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u)$  satisfaz

$$|\mathcal{E}(t, u) - \mathcal{E}(s, u)| \leq \int_s^t \beta(r) dr (1 + d^2(u, u^*)), \quad (3.1.5)$$

onde  $0 \leq s < t$ .

Note que se a condição (3.1.5) é satisfeita para algum  $u^* \in X$ , então ela é satisfeita para todo  $u^* \in X$ . Note também que para cada  $u \in \mathbf{D}$  fixo, a função  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u)$  é diferenciável q.t.p. em  $[0, \infty)$ , porém o conjunto de diferenciabilidade pode mudar de acordo com a escolha de  $u$ . Agora, esclarecemos o que entendemos por solução métrica (3.0.1) com dado inicial  $u_0 \in X$ .

**Definição 3.1.1.** Seja  $\mathcal{E} : [0, \infty) \times X \rightarrow (-\infty, \infty]$  um funcional satisfazendo as hipóteses (E1)-(E3), e  $u_0 \in X$ . Dizemos que uma curva absolutamente contínua  $u : [0, \infty) \rightarrow X$  é uma solução de (3.0.1)-(3.0.2) se  $u(0) = u_0$ , a função  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u(t))$  é absolutamente contínua,

$$|u'|, |\partial \mathcal{E}(\cdot)|(u(\cdot)) \in L^2_{loc}([0, \infty)),$$

e, para cada  $0 \leq s < t < \infty$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, u(t)) - \mathcal{E}(s, u(s)) &\leq \int_s^t \partial_r \mathcal{E}(r, u(r)) \, dr - \frac{1}{2} \int_s^t |u'|^2(r) \, dr \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_s^t |\partial \mathcal{E}(r)|^2(u(r))(r) \, dr. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

## 3.2 Esquema Variacional Implícito

Uma estratégia para construir uma solução do sistema (3.0.1)-(3.0.2) é construir um esquema discreto implícito, também chamado de esquema de Euler. Começamos considerando a aproximação de Moreau-Yosida. Para  $t \geq 0$  e  $\tau > 0$ , tal aproximação é definida por

$$\mathcal{E}_{t,\tau}(u) = \inf_{v \in X} \{ \mathbf{E}(t, \tau, u; v) \}, \quad (3.2.1)$$

onde

$$\mathbf{E}(t, \tau, u; v) := \mathcal{E}(t, v) + \frac{d^2(u, v)}{2\tau}. \quad (3.2.2)$$

Dada  $\tau = \{0 = t_\tau^0 < t_\tau^1 < \dots < t_\tau^n < \dots\}$  uma partição de  $[0, \infty)$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_\tau^n = \infty$ , denotamos o tamanho de passo por  $\tau_n = t_\tau^n - t_\tau^{n-1}$ . Seja  $U_\tau^0 \in X$  um dado inicial indexado à partição  $\tau$ . Podemos construir a sequência, chamada de *solução discreta*,

$$U_\tau^n \in \text{Argmin} \{ \mathbf{E}(t_\tau^n, \tau_n, U_\tau^n; v) \}. \quad (3.2.3)$$

Em vista de que os resultados de convergência são obtidos localmente no tempo, a partir de agora fixamos  $T > 0$ , porém arbitrário, e fazemos nossa análise no intervalo  $[0, T]$ . Para isto, impomos mais duas condições em termos da aproximação de Moreau-Yosida (3.2.1)-(3.2.2).

Assumimos que:

**E4.-** Para  $T > 0$ , existe um número  $\tau^*(T) = \tau^* > 0$  tal que a função

$$t \rightarrow \mathcal{E}_{t,\tau^*}(u^*)$$

é limitada inferiormente em  $[0, T]$ , onde  $u^*$  é o mesmo elemento aparecendo na suposição (E3).

**E5.-** Existe uma função  $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\lambda \in L_{loc}^\infty([0, \infty))$  tal que: dados pontos  $u, v_0, v_1 \in X$ , existe uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  com  $\gamma(0) = v_0$ ,  $\gamma(1) = v_1$  e a desigualdade

$$\mathbf{E}(t, \tau, u; \gamma_s) \leq (1-s)\mathbf{E}(t, \tau, u; v_0) + s\mathbf{E}(t, \tau, u; v_1) - \frac{\tau^{-1} + \lambda(t)}{2} s(1-s)d^2(v_0, v_1)$$

é válida para  $0 < \tau < \frac{1}{\lambda_T^-}$  e  $s \in [0, 1]$ , onde  $\lambda_T^- = \max\{0, -\inf_{t \in [0, T]} \lambda(t)\}$ .

*Observação 3.2.1.* • Na hipótese **(E5)**, assumimos a existência da curva  $\gamma$  para pontos quaisquer no espaço  $X$  ao contrário do que é feito em [3], onde tal curva existe só para elementos no domínio do funcional. Esta diferença não é determinante para os argumentos de uma teoria geral nem acrescenta vantagens substanciais. Isto é feito desde que em nossas aplicações tal propriedade é de fato satisfeita, precisamente estamos falando de geodésicas generalizadas no espaço de Wasserstein.

- Note que, pelo Lema 1.1.4, para cada  $u \in X$  e  $0 < \tau < \tau^*$ , temos que a função  $t \rightarrow \mathcal{E}_{t,\tau}(u)$  é limitada inferiormente em  $[0, T]$ .

Em vista das suposições **(E4)** e **(E5)**, assumimos por motivos técnicos que  $0 < \tau < \tau^* \leq \min\{\frac{1}{\lambda_{T+1}^-}, 1\}$ .

### 3.3 Construção e Propriedades do Esquema Implícito

Nesta seção, analisamos o problema de minimização (3.2.1) e estudamos alguns resultados do esquema variacional implícito (3.2.3). Estes resultados podem ser vistos como uma extensão de [3, capítulos 3 e 4] para o caso de funcionais que dependem do tempo. Começamos com a existência do minimizante.

**Lema 3.3.1.** *Assuma que as hipóteses **(E1)**, **(E4)** e **(E5)** sejam válidas. Seja  $u \in X$ ,  $0 \leq t < T$  e  $0 < \tau < \tau^*$ . Então, o problema de minimização (3.2.1) tem uma única solução que denotamos por  $u_\tau^t$ .*

*Demonstração.* Lembre que, pela observação 3.2.1,  $\mathcal{E}_{t,\tau}(u) > -\infty$  e portanto podemos tomar uma sequência minimizante  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{D}$  para o funcional  $\mathbf{E}(t, \tau, u; \cdot)$ . Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , pela suposição **(E5)**, sabemos que existe uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , com  $\gamma(0) = v_n$ ,  $\gamma(1) = v_m$  tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{t,\tau}(u) &\leq \mathbf{E}(t, \tau, u; \gamma(1/2)) \\ &\leq \frac{1}{2}\mathbf{E}(t, \tau, u; v_n) + \frac{1}{2}\mathbf{E}(t, \tau, u; v_m) - \frac{\tau^{-1} + \lambda(t)}{8}d^2(v_n, v_m). \end{aligned}$$

Reescrevendo esta expressão, obtemos que

$$\frac{\tau^{-1} + \lambda(t)}{8}d^2(v_n, v_m) \leq \frac{1}{2}(\mathbf{E}(t, \tau, u; v_n) - \mathcal{E}_{t,\tau}(u)) + \frac{1}{2}(\mathbf{E}(t, \tau, u; v_m) - \mathcal{E}_{t,\tau}(u)).$$

Uma vez que  $\tau^{-1} + \lambda(t) > 0$ , segue que  $v_n$  é uma sequência de Cauchy e portanto existe  $u_\tau^t := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ . Usando a semi-continuidade inferior dos funcionais envolvidos, temos que

$u_\tau^t$  é um ponto de mínimo, i.e.

$$\mathcal{E}_{t,\tau}(u) = \mathbf{E}(t, \tau, u; u_\tau^t).$$

Finalmente, a unicidade de  $u_\tau^t$  segue da propriedade de convexidade **(E5)**.  $\square$

*Observação 3.3.2.* Note que, em vista da restrição que temos assumido para  $\tau^*$ , a saber  $\tau^* \leq \min\{\frac{1}{\lambda_{T+1}^-}, 1\}$ , então a solução discreta definida em (3.2.3) está bem definida pelo menos para toda  $1 \leq n \leq N$ , onde  $t_\tau^{N-1} < T \leq t_\tau^N$ .

Agora, provamos uma propriedade de continuidade da função  $(\tau, t, u) \rightarrow u_\tau^t$  que generaliza parcialmente os teoremas 3.1.2 e 4.1.2 de [3]

**Teorema 3.3.3.** *Assuma que as suposições **(E1)**-**(E5)** são válidas. Então:*

- a) *A aplicação  $(t, \tau, u) \in [0, T] \times (0, \tau^*) \times X \rightarrow \mathcal{E}_{t,\tau}(u) \in \mathbb{R}$  é contínua.*
- b) *A aplicação  $(t, \tau, u) \in [0, T] \times (0, \tau^*) \times X \rightarrow u_\tau^t \in X$  é contínua.*

*Demonstração.* Começamos mostrando a). Seja  $(t_n, \tau_n, u_n) \in [0, T] \times (0, \tau^*) \times X$  uma sequência convergindo para  $(t_0, \tau_0, u_0) \in [0, T] \times (0, \tau^*) \times X$  e denote por  $v_n = (u_n)_{\tau_n}^{t_n}$  o ponto de mínimo construído no Lema 3.3.1. Então, temos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(u_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(t_n, \tau_n, u_n; v_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(t_n, \tau_n, u_n; v) \\ &= \mathbf{E}(t_0, \tau_0, u_0; v), \end{aligned}$$

para cada  $v \in X$ . Tomando o ínfimo em relação a  $v$ , temos que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(u_n) \leq \mathcal{E}_{t_0, \tau_0}(u_0)$ . Por outro lado, uma vez que  $\mathcal{E}_{t_0, \tau_0}(u_0) < \infty$ , a estimativa anterior também implica que a sequência numérica  $\mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(u_n)$  é limitada superiormente. Logo, usando o Lema 1.1.4, temos a limitação

$$d^2(u_n, v_n) \leq \frac{4\tau^*\tau_n}{\tau^* - \tau_n} \left( \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(u_n) - \mathcal{E}_{t_n, \tau^*}(u^*) + \frac{d^2(u^*, u_n)}{\tau^* - \tau_n} \right).$$

Portanto, segue que a sequência  $v_n$  é limitada na métrica, pois  $t \rightarrow \mathcal{E}_{t, \tau^*}(u^*)$  é localmente

limitada inferiormente. Logo,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(u_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\tau_n} (d(u_n, u_0) - d(v_n, u_0))^2 + \mathcal{E}(t_n, v_n) \right\} \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d^2(u_n, u_0)}{2\tau_n} - \frac{d(u_n, u_0)d(u_0, v_n)}{\tau_n} + \frac{\tau_0 - \tau_n}{2\tau_0\tau_n} d^2(v_n, u_0) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{E}(t_0, \tau_0, u_0; v_n) + (\mathcal{E}(t_n, v_n) - \mathcal{E}(t_0, v_n)) \right\} \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \mathcal{E}_{t_0, \tau_0}(u_0) - \int_{[t_n, t_0]} \beta(r) dr (1 + d^2(u^*, v_n)) \right\} \\
&= \mathcal{E}_{t_0, \tau_0}(u_0),
\end{aligned}$$

donde segue o item a). Para mostrar o item b) note que

$$\mathbf{E}(t_0, \tau_0, u_0; v_n) - \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(u_n) = \left( \frac{d^2(u_0, v_n)}{\tau_0} - \frac{d^2(v_n, u_n)}{\tau_n} \right) + (\mathcal{E}(t_0, v_n) - \mathcal{E}(t_n, v_n)).$$

Usando novamente o fato de  $v_n$  ser limitada na métrica e as convergências  $u_n \rightarrow u_0$ ,  $t_n \rightarrow t_0$  e  $\tau_n \rightarrow \tau_0$ , não é difícil ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{E}(t_0, \tau_0, u_0; v_n) - \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(u_n)) = 0.$$

Logo, pela continuidade mostrada no item a), temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(t_0, \tau_0, u_0; v_n) = \mathcal{E}_{t_0, \tau_0}(u_0)$ . Assim, temos que  $v_n$  é uma sequência minimizante e a prova do Lema 3.3.1 implica que  $v_n$  é convergente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = (u_0)_{\tau_0}^{t_0}$ , obtendo a continuidade desejada.  $\square$

Agora, derivamos algumas estimativas que serão usadas na convergência das soluções aproximadas definidas na seção 3.4.

**Lema 3.3.4.** *Assuma as condições (E1)-(E5). Dados  $\tau \in (0, \tau^*)$ ,  $t \geq 0$  e  $u \in \mathbf{D}$ , então temos a seguinte estimativa*

$$d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*) - d^2(u, u^*) \leq \epsilon \frac{d^2(u_\tau^{t+\tau}, u)}{\tau} + \tau \frac{d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*)}{\epsilon}, \quad (3.3.1)$$

para todo  $\epsilon > 0$ . Se  $\tau \leq \tau^*/8$ , então

$$\begin{aligned}
d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*) &\leq 4\tau^* \left( \mathcal{E}(t, u) + \int_t^{t+\tau^*} \beta(r) dr (1 + d^2(u, u^*)) - \inf_{0 \leq r \leq t+\tau^*} \mathcal{E}_{r, \tau^*}(u^*) \right) \\
&\quad + 4d^2(u, u^*). \quad (3.3.2)
\end{aligned}$$

*Demonstração.* De fato, temos que

$$\begin{aligned}
d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*) - d^2(u, u^*) &= -2d(u_\tau^{t+\tau}, u^*)(d(u, u^*) - d(u_\tau^{t+\tau}, u^*)) - (d(u, u^*) - d(u_\tau^{t+\tau}, u^*))^2 \\
&\leq 2d(u_\tau^{t+\tau}, u^*)d(u_\tau^{t+\tau}, u) \\
&\leq \epsilon \frac{d^2(u_\tau^{t+\tau}, u)}{\tau} + \tau \frac{d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*)}{\epsilon} \\
&\leq 2\epsilon(\mathcal{E}(t + \tau, u) - \mathcal{E}(t + \tau, u_\tau^{t+\tau})) + \tau \frac{d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*)}{\epsilon} \\
&\leq 2\epsilon(\mathcal{E}(t + \tau, u) - \mathcal{E}_{t+\tau, \tau^*}(u^*)) + \epsilon \frac{d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*)}{\tau^*} + \tau \frac{d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*)}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Note que na terceira linha acima já obtemos (3.3.1). Escolhendo  $\epsilon = \frac{\tau^*}{2}$ , segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*) &\leq \tau^* \left( \mathcal{E}(t, u) + \int_t^{t+\tau^*} \beta(r) dr (1 + d^2(u, u^*)) - \mathcal{E}_{t+\tau, \tau^*}(u^*) \right) \\
&\quad + d^2(u, u^*) + \frac{2\tau}{\tau^*} d^2(u_\tau^{t+\tau}, u^*),
\end{aligned}$$

e, escolhendo  $\tau \leq \frac{\tau^*}{8}$ , concluimos com a demonstração.  $\square$

Agora, temos o seguinte resultado de diferenciabilidade.

**Proposição 3.3.5.** *Assuma que as condições (E1)-(E5) sejam válidas. Para  $0 < \tau \leq \frac{\tau^*}{8}$ , a aplicação  $\tau \rightarrow \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(u)$  é localmente absolutamente contínua em  $(0, \tau^*/8]$  e portanto diferenciável em quase todo ponto desse intervalo. Se supormos ainda que, para cada  $u \in \mathbf{D}$ , o conjunto de pontos de diferenciabilidade da função  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u)$  não depende de  $u$  (e.g. se  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u)$  for diferenciável), então*

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(u) = \partial_t \mathcal{E}(t + \tau, u_\tau^{t+\tau}) - \frac{d^2(u, u_\tau^{t+\tau})}{2\tau^2}, \quad (3.3.3)$$

nos pontos onde a derivada existe. Finalmente, temos a seguinte expressão integral

$$\frac{d^2(u, u_\tau^{t+\tau})}{2\tau} + \int_0^\tau \frac{d^2(u, u_r^{t+r})}{2r^2} dr = \int_0^\tau \partial_t \mathcal{E}(t + r, u_r^{t+r}) dr + \mathcal{E}(t, u) - \mathcal{E}(t + \tau, u_\tau^{t+\tau}). \quad (3.3.4)$$

*Demonstração.* Sejam  $0 < \tau_0 < \tau_1 \leq \frac{\tau^*}{8}$ . Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{t+\tau_1, \tau_1}(u) - \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u) &\leq \mathcal{E}(t + \tau_1, u_{\tau_0}^{t+\tau_0}) - \mathcal{E}(t + \tau_0, u_{\tau_0}^{t+\tau_0}) \\
&\quad + \frac{\tau_0 - \tau_1}{2\tau_1\tau_0} d^2(u, u_{\tau_0}^{t+\tau_0}) \\
&\leq \int_{t+\tau_0}^{t+\tau_1} \beta(r) dr (1 + d^2(u_{\tau_0}^{t+\tau_0}, u^*)) + \frac{\tau_0 - \tau_1}{2\tau_1\tau_0} d^2(u, u_{\tau_0}^{t+\tau_0}),
\end{aligned} \quad (3.3.5)$$

trocando os papeis de  $\tau_0$  e  $\tau_1$ , também podemos obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{t+\tau_1, \tau_1}(u) - \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u) &\geq \mathcal{E}(t + \tau_1, u_{\tau_1}^{t+\tau_1}) - \mathcal{E}(t + \tau_0, u_{\tau_1}^{t+\tau_1}) \\
&\quad + \frac{\tau_0 - \tau_1}{2\tau_1\tau_0} d^2(u, u_{\tau_1}^{t+\tau_1}) \\
&\geq - \int_{t+\tau_0}^{t+\tau_1} \beta(r) dr (1 + d^2(u_{\tau_1}^{t+\tau_1}, u^*)) + \frac{\tau_0 - \tau_1}{2\tau_1\tau_0} d^2(u, u_{\tau_1}^{t+\tau_1}).
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Logo, usando (3.3.2) no Lema 3.3.4, podemos estimar o termo  $d^2(u, u_{\tau_i}^{t+\tau_i})$  e  $d^2(u^*, u_{\tau_i}^{t+\tau_i})$ ,  $i = 0, 1$ , por uma expressão que não depende de  $\tau$  em cada intervalo compacto de  $(0, \frac{\tau^*}{8}]$ . Concluimos que a função  $\tau \rightarrow \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(u)$  é localmente absolutamente contínua em  $(0, \frac{\tau^*}{8}]$  e portanto é derivável q.t.p. Para obter (3.3.3), seja  $\tau$  um ponto de diferenciabilidade da função  $\tau \rightarrow \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(u)$  e onde  $t + \tau$  é um ponto de diferenciabilidade de  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u)$ , que não depende de  $u$ . Fazendo  $\tau_0 = \tau$  em (3.3.5), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(u) &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(t + \tau + \delta, u_{\tau}^{t+\tau}) - \mathcal{E}(t + \tau, u_{\tau}^{t+\tau})}{\delta} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-1}{2(\tau + \delta)\tau} d^2(u, u_{\tau}^{t+\tau}) \\
&= \partial_t \mathcal{E}(t + \tau, u_{\tau}^{t+\tau}) - \frac{d^2(u, u_{\tau}^{t+\tau})}{2\tau^2}.
\end{aligned}$$

Similarmente, usamos (3.3.6) com  $\tau_1 = \tau$ , para obter a desigualdade contrária. Finalmente, integrando (3.3.3), obtemos que

$$\mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(u) - \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d^2(u, u_r^{t+r})}{2r^2} dr = \int_{\tau_0}^{\tau} \partial_t \mathcal{E}(t + r, u_r^{t+r}) dr.$$

Observe que, pela suposição **(E3)** e a estimativa (3.3.2) no Lema 3.3.4, a integral do lado direito é finita mesmo para  $\tau_0 = 0$ . Logo, basta mostrar que  $\mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u) \rightarrow \mathcal{E}(t, u)$  quando  $\tau_0 \rightarrow 0$ . De fato, primeiro observe que

$$\mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u) \leq \mathcal{E}(t + \tau_0, u).$$

Assim, segue que

$$\limsup_{\tau_0 \rightarrow 0^+} \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u) \leq \mathcal{E}(t, u).$$

Em particular, para  $\tau_0$  suficientemente pequeno, temos que  $\mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u)$  é limitada superiormente. Pelo Lema 1.1.4, obtemos

$$d^2(u, u_{\tau_0}^{t+\tau_0}) \leq \frac{\tau^*\tau_0}{\tau^* - \tau_0} \left( \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u) - \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau^*}(u^*) + \frac{1}{\tau^* - \tau_0} d^2(u^*, u) \right).$$

Logo, fazendo  $\tau_0 \rightarrow 0$ , concluimos que  $d(u, u_{\tau_0}^{t+\tau_0}) \rightarrow 0$ . Agora, usando a semi-continuidade

inferior do funcional, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t, u) &\geq \liminf_{\tau_0 \rightarrow 0} \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u) \\
&\geq \liminf_{\tau_0 \rightarrow 0} \left( \mathcal{E}(t, u_{\tau_0}^{t+\tau_0}) - \int_t^{t+\tau_0} \beta(r) dr (1 + d^2(u^*, u_{\tau_0}^{t+\tau_0})) \right) \\
&\geq \mathcal{E}(t, u),
\end{aligned}$$

de onde segue que  $\lim_{\tau_0 \rightarrow 0} \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(u) = \mathcal{E}(t, u)$  e portanto (3.3.4).  $\square$

*Observação 3.3.6.* Note que na prova do resultado anterior, obtemos o limite importante

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} d(u, u_{\tau}^{t+\tau}) = 0.$$

A seguir enunciamos uma versão discreta do Lema de Gronwall.

**Lema 3.3.7** ([3] Lema 3.2.4). *Seja  $A, \alpha \in [0, \infty)$  e para cada  $n \geq 1$ , sejam  $a_n, \beta_n \in [0, +\infty)$  tal que*

$$a_n \leq A + \alpha \sum_{j=1}^n \beta_j a_j \quad \forall n \geq 1, \quad \text{com } m = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha \beta_n < 1.$$

*Então, denotando  $B := A/(1 - m)$ ,  $\theta := \alpha/(1 - m)$  e  $\beta_0 = 0$ , temos que*

$$a_n \leq B e^{\theta \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i}, \quad n \geq 1.$$

O próximo resultado permite limitar a sequência discreta em cada intervalo limitado de  $[0, \infty)$ . Compare com o resultado em [3, Lema 3.2.2].

**Lema 3.3.8.** *Assuma as condições (E1)-(E5). Seja  $T > 0$  e  $\tau$  uma partição de  $[0, \infty)$ . Escolha  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $T \in (t_{\tau}^{N-1}, t_{\tau}^N]$ . Assuma ainda que existe uma constante  $S > 0$  tal que*

$$\mathcal{E}(0, U_{\tau}^0) \leq S \quad d^2(u^*, U_{\tau}^0) \leq S. \quad (3.3.7)$$

*Então, existe uma constante  $C = C(S, T, \tau^*, \mathcal{E}) > 0$  tal que para todo  $1 \leq n \leq N$ , temos que*

$$d^2(u^*, U_{\tau}^n) \leq C, \quad \sum_{j=1}^n \frac{d^2(U_{\tau}^j, U_{\tau}^{j-1})}{2\tau_j} \leq \sum_{j=1}^n \left( \mathcal{E}(t_{\tau}^j, U_{\tau}^{j-1}) - \mathcal{E}(t_{\tau}^j, U_{\tau}^j) \right) \leq C, \quad (3.3.8)$$

*para  $|\tau|$  suficientemente pequeno.*

*Demonstração.* Usando a propriedade de minimalidade de  $U_{\tau}^j$  e a condição (E3), pode-se



obter facilmente a estimativa

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \frac{d^2(U_\tau^j, U_\tau^{j-1})}{2\tau_j} &\leq \sum_{j=1}^n \left( \mathcal{E}(t_\tau^j, U_\tau^{j-1}) - \mathcal{E}(t_\tau^j, U_\tau^j) \right) \\
&\leq \mathcal{E}(0, U_\tau^0) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \int_{t_\tau^{j-1}}^{t_\tau^j} \beta(r) \, dr (1 + d^2(u^*, U_\tau^{j-1})), \tag{3.3.9}
\end{aligned}$$

para  $1 \leq n \leq N$ . Logo, usando conjuntamente a estimativa anterior e a estimativa (3.3.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}d^2(u^*, U_\tau^n) - \frac{1}{2}d^2(u^*, U_\tau^0) &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}d^2(u^*, U_\tau^j) - \frac{1}{2}d^2(u^*, U_\tau^{j-1}) \\
&\leq \sum_{j=1}^n \left( \epsilon \frac{d^2(U_\tau^j, U_\tau^{j-1})}{2\tau_j} + \tau_j \frac{d^2(U_\tau^j, u^*)}{2\epsilon} \right) \\
&\leq \epsilon \left( \mathcal{E}(0, U_\tau^0) - \inf_{0 \leq t \leq T+\tau^*} \mathcal{E}_{t, \tau^*}(u^*) \right) + \epsilon \frac{d^2(u^*, U_\tau^n)}{2\tau^*} \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \tau_j \frac{d^2(U_\tau^j, u^*)}{2\epsilon} + \epsilon \sum_{j=1}^n \int_{t_\tau^{j-1}}^{t_\tau^j} \beta(r) \, dr (1 + d^2(u^*, U_\tau^{j-1})).
\end{aligned}$$

Escolhendo  $\epsilon = \frac{\tau^*}{2}$ , segue que

$$\begin{aligned}
d^2(u^*, U_\tau^N) &\leq 2\tau^* \left( \mathcal{E}(0, U_\tau^0) - \inf_{0 \leq t \leq T+\tau^*} \mathcal{E}_{t, \tau^*}(u^*) \right) + 2 \left( 1 + \tau^* \int_0^{\tau^*} \beta(r) \, dr \right) d^2(u^*, U_\tau^0) \\
&\quad + 2\tau^* \int_0^{T+\tau^*} \beta(r) \, dr + 4 \sum_{j=1}^N \left( \frac{\tau_j}{\tau^*} + \frac{\tau^*}{2} \int_{t_\tau^j}^{t_\tau^{j+1}} \beta(r) \, dr \right) d^2(u^*, U_\tau^j) \\
&\leq A(S, T, \tau^*, \mathcal{E}) + 4 \sum_{j=1}^N \beta_j d^2(u^*, U_\tau^j),
\end{aligned}$$

onde  $\beta_j = \frac{\tau_j}{\tau^*} + \frac{\tau^*}{2} \int_{t_\tau^j}^{t_\tau^{j+1}} \beta(r) \, dr$ . Agora, desde que a função  $\int_0^t \beta(r) \, dr$  é absolutamente contínua no intervalo  $[0, T + \tau^*]$ , então existe  $\delta = \delta(T) > 0$  tal que  $s, t \in [0, T + \tau^*]$  e  $0 < t - s < \delta$  implica  $\int_s^t \beta(r) \, dr < \frac{1}{4\tau^*}$ . Assim, para  $|\tau| < \min\{\frac{\tau^*}{4}, \delta\}$ , garantimos que  $\max_{1 \leq n \leq N} 4\beta_n < 1$  e usando o Lema 3.3.7 obtemos a primeira desigualdade de (3.3.8). A segunda segue de (3.3.9) e a limitação da sequência discreta.  $\square$

### 3.4 Estimativas a priori vindas da convexidade

Nesta seção, obtemos estimativas a priori para a solução aproximada (3.4.8) que provêm da hipótese de convexidade (E5). A ideia principal é obter uma desigualdade diferencial que é bem conhecida num contexto Euclidiano. De fato, se assumirmos que  $X$  é um espaço Euclidiano e  $\mathcal{E}$  é um funcional  $\lambda(t)$ -convexo, então uma solução  $u(t)$  do sistema

(3.0.1)-(3.0.2) satisfaz a desigualdade diferencial

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v\|^2 + \frac{\lambda(t)}{2} \|u(t) - v\|^2 + \mathcal{E}(t, u(t)) \leq \mathcal{E}(t, v), \quad (3.4.1)$$

para todo  $v \in X$ . Esta desigualdade pode ser também usada para reformular a noção de solução do sistema de fluxo gradiente.

Como uma consequência da propriedade de convexidade assumida em **(E5)** temos a seguinte versão métrica de (3.4.1).

**Lema 3.4.1** ([3], Teorema 4.1.2 (ii)). *Dados  $u, v \in X$ ,  $0 < \tau < \tau^*$  e lembrando que  $u_\tau^t$  denota o mínimo do funcional de Moreau-Yosida (3.2.2), então vale a seguinte desigualdade variacional*

$$\frac{1}{2\tau} d^2(u_\tau^t, v) - \frac{1}{2\tau} d^2(u, v) + \frac{1}{2} \lambda(t) d^2(u_\tau^t, v) \leq \mathcal{E}(t, v) - \mathcal{E}_{t,\tau}(u).$$

Agora, reescrevemos o Lema 3.4.1 para a solução discreta (3.2.3). De fato, dada uma partição  $\tau = \{0 = t_\tau^0 < t_\tau^1 < \dots < t_\tau^n < \dots\}$  de  $[0, \infty)$ , lembrando que  $\tau_n = t_\tau^n - t_\tau^{n-1}$  e  $U_\tau^n$  é a solução discreta definida em (3.2.3), temos

$$\frac{1}{2\tau_n} \left( d^2(U_\tau^n, V) - d^2(U_\tau^{n-1}, V) \right) + \frac{\lambda(t_\tau^n)}{2} d^2(U_\tau^n, V) \leq \mathcal{E}(t_\tau^n, V) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n) - \frac{d^2(U_\tau^n, U_\tau^{n-1})}{2\tau_n}, \quad (3.4.2)$$

para toda  $V \in \mathbf{D}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , onde  $t_\tau^{N-1} < T \leq t_\tau^N$ .

Agora, definimos as funções interpolantes, que dependem da partição escolhida, a serem usadas no esquema de convergência:

$$\mathcal{T}_\tau(t) := t_\tau^n, \quad \mathcal{S}_\tau(t) := t_\tau^{n-1} \quad (3.4.3)$$

$$\tilde{\lambda}_\tau(t) := \lambda(t_\tau^n), \quad (3.4.4)$$

$$l_\tau(t) := \frac{t - t_\tau^{n-1}}{\tau_n}, \quad (3.4.5)$$

$$d_\tau^2(t; V) := (1 - l_\tau(t)) d^2(U_\tau^{n-1}, V) + l_\tau(t) d^2(U_\tau^n, V), \quad (3.4.6)$$

$$\mathcal{E}_\tau(t) := (1 - l_\tau(t)) \mathcal{E}(t_\tau^{n-1}, U_\tau^{n-1}) + l_\tau(t) \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n), \quad (3.4.7)$$

$$\overline{U}_\tau(t) := U_\tau^n, \quad \underline{U}_\tau(t) := U_\tau^{n-1}, \quad (3.4.8)$$

onde todas as definições são dadas para  $t \in (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n]$ . Aqui, também temos as convenções óbvias  $\mathcal{T}_\tau(0) = 0$ ,  $\tilde{\lambda}_\tau(0) = \lambda(0)$ ,  $d_\tau^2(0; V) = d(U_\tau^0, V)$ ,  $\mathcal{E}_\tau(0) = \mathcal{E}(0, U_\tau^0)$  e  $\overline{U}_\tau(0) = \underline{U}_\tau(0) = U_\tau^0$ . Usando (3.4.6), ainda podemos reescrever (3.4.2) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} d_\tau^2(t; V) + \frac{\tilde{\lambda}_\tau(t)}{2} d^2(\overline{U}_\tau(t), V) + \mathcal{E}_\tau(t) - \mathcal{E}(\mathcal{T}_\tau(t), V) &\leq \\ \frac{1}{2} \mathcal{R}_\tau(t) + (1 - l_\tau(t)) (\mathcal{E}(\mathcal{S}_\tau(t), \underline{U}_\tau(t)) - \mathcal{E}(\mathcal{T}_\tau(t), \underline{U}_\tau(t))), & \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

onde

$$\frac{1}{2}\mathcal{R}_\tau(t) := (1 - l_\tau(t))(\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n)) - \frac{1}{2\tau_n}d^2(U_\tau^{n-1}, U_\tau^n) \quad (3.4.10)$$

para  $t \in (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n)$ . Com esta notação, obtemos a seguinte desigualdade diferencial.

**Lema 3.4.2.** *Assuma as condições (E1)-(E5). Defina, para as soluções aproximadas (3.4.8) associada a uma partição  $\tau$ , o termo residual*

$$\mathcal{D}_\tau(t) := (1 - l_\tau(t))d(\overline{U}_\tau(t), \underline{U}_\tau(t)). \quad (3.4.11)$$

Então, para cada  $V \in \mathbf{D}$ , temos a desigualdade diferencial

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} d_\tau^2(t; V) + \frac{\tilde{\lambda}_\tau(t)}{2} d_\tau^2(t; V) - \left( \tilde{\lambda}_\tau^+(t) d(\overline{U}_\tau(t), \underline{U}_\tau(t)) + \tilde{\lambda}_\tau^-(t) \mathcal{D}_\tau(t) \right) d_\tau(t; V) \\ & + \mathcal{E}_\tau(t) - \mathcal{E}(\mathcal{T}_\tau(t), V) \\ & \leq \frac{1}{2} \mathcal{R}_\tau(t) + \frac{\tilde{\lambda}_\tau^-(t)}{2} \mathcal{D}_\tau^2(t) + (1 - l_\tau(t))(\mathcal{E}(\mathcal{S}_\tau(t), \underline{U}_\tau(t)) - \mathcal{E}(\mathcal{T}_\tau(t), \underline{U}_\tau(t))), \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

para cada  $t \in (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n)$ ; em particular, ela é válida q.t.p. em  $[0, T]$ , onde  $T > 0$  é fixado.

*Demonstração.* Em vista da desigualdade (3.4.9) só precisamos estimar o termo

$$d^2(\overline{U}_\tau(t), V) - d_\tau^2(t; V) = (1 - l_\tau) \left( d^2(\overline{U}_\tau(t), V) - d^2(\underline{U}_\tau(t), V) \right).$$

Temos duas possibilidades: se  $\lambda(t_\tau^n) \geq 0$ , então basta assumir que

$$d(U_\tau^n, V) < d(U_\tau^{n-1}, V).$$

Logo,

$$\begin{aligned} d^2(\overline{U}_\tau(t), V) - d_\tau^2(t; V) & \geq -d(U_\tau^n, U_\tau^{n-1})(d(U_\tau^n, V) + d(U_\tau^{n-1}, V)) \\ & \quad + l_\tau(t) d(U_\tau^n, U_\tau^{n-1})(d(U_\tau^{n-1}, V) - d(U_\tau^n, V)) \\ & = -d(U_\tau^n, U_\tau^{n-1}) \left( (1 - l_\tau(t)) d(U_\tau^{n-1}, V) + l_\tau(t) d(U_\tau^n, V) \right. \\ & \quad \left. + d(U_\tau^n, V) \right) \\ & \geq -2d(U_\tau^n, U_\tau^{n-1}) \left( (1 - l_\tau(t)) d(U_\tau^{n-1}, V) + l_\tau(t) d(U_\tau^n, V) \right) \\ & \geq -2d(U_\tau^n, U_\tau^{n-1}) d_\tau(t; V). \end{aligned}$$

Na segunda possibilidade,  $\lambda(t_\tau^n) < 0$ , basta mostrar a estimativa quando  $d^2(\overline{U}_\tau(t), V) \geq d_\tau^2(t; V)$ . Temos que

$$\begin{aligned} d^2(\overline{U}_\tau(t), V) - d_\tau^2(t; V) & = 2d_\tau(t; V)(d(\overline{U}_\tau(t), V) - d_\tau(t; V)) \\ & \quad + (d(\overline{U}_\tau(t), V) - d_\tau(t; V))^2, \end{aligned}$$

porém, pela concavidade da função raiz quadrada, chegamos a

$$0 \leq d(\bar{U}_\tau(t), V) - d_\tau(t; V) \leq \mathcal{D}_\tau(t),$$

donde,

$$d^2(\bar{U}_\tau(t), V) - d_\tau^2(t; V) \leq 2d_\tau(t; V)\mathcal{D}_\tau(t) + \mathcal{D}_\tau^2(t),$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

Agora considere mais uma partição  $\boldsymbol{\eta}$  de  $[0, \infty)$  com  $|\boldsymbol{\eta}| \leq \tau^*$ . Defina a interpolação

$$d_{\tau\boldsymbol{\eta}}^2(t, s) = (1 - l_\eta(s))d_\tau^2(t; \underline{U}_\eta) + l_\eta(s)d_\tau^2(t; \bar{U}_\eta), \quad (3.4.13)$$

para  $(t, s) \in [0, T]^2$ .

A seguir, lembramos uma versão do Lema de Gronwall, cuja demonstração incluímos por completude, uma vez que o enunciado é um pouco mais geral que a versão conhecida.

**Lema 3.4.3.** *Sejam  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função localmente absolutamente contínua e  $a, b, \tilde{\lambda} \in L_{loc}^1([0, \infty))$  funções reais satisfazendo*

$$\frac{d}{dt}x^2(t) + 2\tilde{\lambda}(t)x^2(t) \leq a(t) + 2b(t)x(t) \text{ q.t.p. } t \geq 0. \quad (3.4.14)$$

Então, para cada  $T > 0$ , temos que

$$e^{\alpha(T)}|x(T)| \leq \sqrt{\left(x^2(0) + \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{2\alpha(s)}a(s) \, ds\right)^+} + 2 \int_0^T e^{\alpha(t)}|b(t)| \, dt,$$

onde  $\alpha(t) = \int_0^t \tilde{\lambda}(s) \, ds$ .

*Demonstração.* Multiplicando (3.4.14) por  $e^{2\alpha(t)}$ , podemos reduzir a desigualdade à forma

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha(t)}x)^2 \leq e^{2\alpha(t)}a(t) + 2(e^{\alpha(t)}b(t))(e^{\alpha(t)}x(t))$$

e então podemos assumir que  $\tilde{\lambda} \equiv 0$ . Neste caso, integrando a desigualdade, obtemos

$$x^2(t) - x^2(0) \leq \int_0^t a(s) \, ds + 2 \int_0^t b(s)x(s) \, ds.$$

Usando as notações

$$X(T) = \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|, \quad A(T) = \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t a(s) \, ds \text{ e } B(T) = \int_0^T |b(s)| \, ds$$

podemos tomar o supremo, para obter

$$X^2(T) \leq x^2(0) + A(T) + 2X(T)B(T).$$

Somando  $B^2(T)$  em ambos os lados, chegamos a

$$X(T) - B(T) \leq \sqrt{x^2(0) + A(T) + B^2(T)} \leq \sqrt{(x^2(0) + A(T))^+} + B(T),$$

donde segue imediatamente a conclusão desejada.  $\square$

A ideia agora é aplicar o lema anterior à interpolação definida em (3.4.13). Isto é feito no próximo resultado. Defina o termo residual associado ao nosso funcional

$$\begin{aligned} G_{\tau\eta}(t) &:= 2(1 - l_\tau(t)) [\mathcal{E}(\mathcal{T}_\eta(t), \underline{U}_\tau(t)) - \mathcal{E}(\mathcal{T}_\tau(t), \underline{U}_\tau(t))] \\ &\quad + 2l_\tau(t) [\mathcal{E}(\mathcal{T}_\eta(t), \overline{U}_\tau(t)) - \mathcal{E}(\mathcal{T}_\tau(t), \overline{U}_\tau(t))], \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

onde  $\mathcal{T}_\tau$  e  $\mathcal{T}_\eta$  foram definidos em (3.4.3). Note que em geral  $G_{\tau\eta}(t) \neq G_{\eta\tau}(t)$ .

**Corolário 3.4.4.** *Assuma que o funcional  $\mathcal{E}$  satisfaz as condições (E1)-(E5). Então, a interpolação “ $d_{\tau\eta}$ ” definida em (3.4.13) satisfaz a seguinte desigualdade diferencial, q.t.p.  $t \in [0, T]$ .*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} d_{\tau\eta}^2(t, t) + (\tilde{\lambda}_\tau(t) + \tilde{\lambda}_\eta(t)) d_{\tau\eta}^2(t, t) &\leq 2 \left[ \tilde{\lambda}_\tau^+(t) d(\overline{U}_\tau(t), \underline{U}_\tau(t)) + \tilde{\lambda}_\eta^+(t) d(\overline{U}_\eta(t), \underline{U}_\eta(t)) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\lambda}_\tau^-(t) \mathcal{D}_\tau(t) + \tilde{\lambda}_\eta^-(t) \mathcal{D}_\eta(t) \right] d_{\tau\eta}(t, t) + \mathcal{R}_\tau(t) \\ &\quad + \mathcal{R}_\eta(t) + \tilde{\lambda}_\tau^-(t) \mathcal{D}_\tau^2(t) + \tilde{\lambda}_\eta^-(t) \mathcal{D}_\eta^2(t) + G_{\tau\eta}(t) \\ &\quad + G_{\eta\tau}(t). \end{aligned}$$

Além disso, vale a estimativa

$$\begin{aligned} e^{\alpha_{\tau\eta}(t)} d_{\tau\eta}(t, t) &\leq \left( d^2(U_\tau^0, U_\eta^0) + \int_0^t e^{2\alpha_{\tau\eta}(s)} \sum_{\theta \in \{\tau, \eta\}} \left( \mathcal{R}_\theta^+(s) + \tilde{\lambda}_\theta^-(s) \mathcal{D}_\theta^2(s) \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t e^{2\alpha_{\tau\eta}(s)} \left( G_{\eta\tau}^+(s) + G_{\tau\eta}^+(s) \right) ds \right)^{1/2} \\ &\quad + \int_0^t e^{\alpha_{\tau\eta}(s)} \left( \tilde{\lambda}_\tau^+(s) d(\overline{U}_\tau(s), \underline{U}_\tau(s)) + \tilde{\lambda}_\eta^+(s) d(\overline{U}_\eta(s), \underline{U}_\eta(s)) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\lambda}_\tau^-(s) \mathcal{D}_\tau(s) + \tilde{\lambda}_\eta^-(s) \mathcal{D}_\eta(s) \right) ds, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T]$ , onde  $\alpha_{\tau\eta}(t) := \int_0^t \tilde{\lambda}_\tau(s) + \tilde{\lambda}_\eta(s) ds$ .

*Demonstração.* De fato, primeiro fazemos  $V = \underline{U}_\eta(s)$  em (3.4.12) e multiplicamos pelo fator  $1 - l_\eta(s)$ . Logo, fazemos  $V = \overline{U}_\eta(s)$  em (3.4.12) e multiplicamos por  $l_\eta(s)$ . Somando

as duas expressões obtidas chegamos a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} d_{\tau\eta}^2(t, s) + \frac{\tilde{\lambda}_{\tau}(t)}{2} d_{\tau\eta}^2(t, s) - \left( \tilde{\lambda}_{\tau}^+(t) d(\overline{U}_{\tau}(t), \underline{U}_{\tau}(t)) + \tilde{\lambda}_{\tau}^-(t) \mathcal{D}_{\tau}(t) \right) d_{\tau\eta}(t, s) \\
& + \mathcal{E}_{\tau}(t) - (1 - l_{\eta}(s)) \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\tau}(t), \underline{U}_{\eta}(s)) - l_{\eta}(s) \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\tau}(t), \overline{U}_{\eta}(s)) \\
& \leq \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\tau}(t) + \frac{\tilde{\lambda}_{\tau}^-(t)}{2} \mathcal{D}_{\tau}^2(t) + (1 - l_{\tau}(t)) (\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\tau}(t), \underline{U}_{\tau}(t)) - \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\tau}(t), \underline{U}_{\tau}(t))), \quad (3.4.16)
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade

$$d_{\tau\eta}(t, s) \geq (1 - l_{\eta}(s)) d_{\tau}(t; \underline{U}_{\eta}) + l_{\eta}(s) d_{\tau}(t; \overline{U}_{\eta}).$$

Analogamente, trocando os papéis de  $\tau$  e  $\eta$ , obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} d_{\eta\tau}^2(s, t) + \frac{\tilde{\lambda}_{\eta}(t)}{2} d_{\eta\tau}^2(s, t) - \left( \tilde{\lambda}_{\eta}^+(s) d(\overline{U}_{\eta}(s), \underline{U}_{\eta}(s)) + \tilde{\lambda}_{\eta}^-(s) \mathcal{D}_{\eta}(s) \right) d_{\eta\tau}(s, t) \\
& + \mathcal{E}_{\eta}(s) - (1 - l_{\tau}(t)) \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\eta}(s), \underline{U}_{\tau}(t)) - l_{\tau}(t) \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\eta}(s), \overline{U}_{\tau}(t)) \\
& \leq \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\eta}(s) + \frac{\tilde{\lambda}_{\eta}^-(s)}{2} \mathcal{D}_{\eta}^2(s) + (1 - l_{\eta}(s)) (\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\eta}(s), \underline{U}_{\eta}(s)) - \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\eta}(s), \underline{U}_{\eta}(s))). \quad (3.4.17)
\end{aligned}$$

Note que  $d_{\tau\eta}^2(t, s) = d_{\eta\tau}^2(s, t)$  e também que

$$\frac{d}{dt} d_{\tau\eta}^2(t, t) = \frac{\partial}{\partial t} d_{\tau\eta}^2(t, t) + \frac{\partial}{\partial s} d_{\tau\eta}^2(t, t).$$

Logo, somando as contribuições de (3.4.16) e (3.4.17), notando que

$$\begin{aligned}
& (1 - l_{\tau}(t)) (\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\tau}(t), \underline{U}_{\tau}(t)) - \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\tau}(t), \underline{U}_{\tau}(t))) - \mathcal{E}_{\tau}(t) + (1 - l_{\tau}(t)) \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\eta}(t), \underline{U}_{\tau}(t)) \\
& + l_{\tau}(t) \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\eta}(t), \overline{U}_{\tau}(t))) = \frac{1}{2} G_{\tau\eta}(t),
\end{aligned}$$

e fazendo o mesmo para o caso  $G_{\eta\tau}(t)$ , obtemos a primeira conclusão do corolário.

Para obter a segunda desigualdade, basta aplicar o Lema 3.4.3 e usar a estimativa

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t'} e^{\alpha_{\tau\eta}(s)} \sum_{\theta, \xi \in \{\tau, \eta\}, \theta \neq \xi} \left( \mathcal{R}_{\theta}(s) + \tilde{\lambda}_{\theta}^-(s) \mathcal{D}_{\theta}^2(s) + G_{\theta\xi}(s) \right) ds \\
& \leq \int_0^t e^{\alpha_{\tau\eta}(t)} \sum_{\theta, \xi \in \{\tau, \eta\}, \theta \neq \xi} \left( \mathcal{R}_{\theta}^+(s) + \tilde{\lambda}_{\theta}^-(s) \mathcal{D}_{\theta}^2(s) + G_{\theta\xi}^+(s) \right) ds,
\end{aligned}$$

para todo  $t' \in [0, t]$ . □

### 3.5 Convergência da Solução Aproximada

Nesta seção, provamos que a solução aproximada  $\overline{U}_{\tau}$  converge uniformemente em cada intervalo limitado. O próximo passo é estimar os termos residuais que aparecem no

corolário 3.4.4. Começamos com o lema abaixo

**Lema 3.5.1.** *Assuma as condições (E1)-(E5). Então, valem as estimativas:*

$$\int_0^T e^{2\alpha\tau\eta(s)} (\mathcal{R}_\tau^+(s) + \tilde{\lambda}_\tau^-(s) \mathcal{D}_\tau^2(s)) ds \leq C|\tau| \sum_{n=1}^N (\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n)) \quad (3.5.1)$$

$$\left( \int_0^T e^{\alpha\tau\eta(s)} \tilde{\lambda}_\tau^-(s) \mathcal{D}_\tau(s) ds \right)^2 \leq C|\tau|^2 \sum_{n=1}^N (\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n)) \quad (3.5.2)$$

$$\left( \int_0^T e^{\alpha\tau\eta(s)} \tilde{\lambda}_\tau^+(s) d(\overline{U}_\tau(s), \underline{U}_\tau(s)) ds \right)^2 \leq C(T)|\tau|^2 \sum_{n=1}^N (\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n)), \quad (3.5.3)$$

para  $t \in [0, T]$ ,  $T \in (t_\tau^{N-1}, t_\tau^N]$  e  $|\tau|, |\eta| \leq \tau^*$ .

*Demonstração.* Primeiro notemos que

$$\int_0^t \tilde{\lambda}_\tau(s) ds \leq T \sup_{t \in [0, T]} (\lambda(t)).$$

Logo, para  $I_\tau^n = (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n]$ , com  $1 \leq n \leq N$ , podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_{I_\tau^n} e^{2\alpha\tau\eta(s)} \tilde{\lambda}_\tau^-(s) \mathcal{D}_\tau^2(s) ds &\leq K^2(T) \lambda_T^- \int_{t_\tau^{n-1}}^{t_\tau^n} \frac{(t_\tau^n - t)^2}{\tau_n^2} ds d^2(U_\tau^n, U_\tau^{n-1}) \\ &= \frac{1}{3} K^2(T) \lambda_T^- \tau_n d^2(U_\tau^n, U_\tau^{n-1}) \\ &\leq \frac{1}{3} K^2(T) d^2(U_\tau^n, U_\tau^{n-1}), \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

onde foi usado o fato  $\lambda_T^- \tau_n \leq \lambda_T^- \tau^* < 1$ , de acordo com (E5), e  $K(T) = \exp\left(2T \sup_{t \in [0, T]} (\lambda(t))\right)$ . Por outro lado, segue de (3.4.10) que

$$\begin{aligned} \int_{I_\tau^n} e^{2\alpha\tau\eta(s)} \mathcal{R}_\tau^+(s) ds &\leq K^2(T) \int_{I_\tau^n} 2(1 - l_\tau(s)) (\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathbf{E}(t_\tau^n, \tau_n, U_\tau^{n-1}, U_\tau^n)) ds \\ &= K^2(T) \tau_n (\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathbf{E}(t_\tau^n, \tau_n, U_\tau^{n-1}, U_\tau^n)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{I_\tau^n} e^{2\alpha\tau\eta(s)} (\mathcal{R}_\tau^+(s) + \tilde{\lambda}_\tau^-(s) \mathcal{D}_\tau^2(s)) ds \leq K^2(T) |\tau| (\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1})),$$

donde segue (3.5.1). Por outro lado, segue de (3.5.4) que

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{2\alpha\tau\eta(s)} \tilde{\lambda}_\tau^-(s) \mathcal{D}_\tau^2(s) ds &\leq \frac{2}{3} \lambda_T^- K^2(T) |\tau|^2 \sum_{n=1}^N \frac{d^2(U_\tau^n, U_\tau^{n-1})}{2\tau_n} \\ &\leq \frac{2}{3} \lambda_T^- K^2(T) |\tau|^2 \sum_{n=1}^N (\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n)). \end{aligned}$$

Deste modo, podemos estimar

$$\begin{aligned} \left( \int_0^T e^{\alpha\tau\eta(s)} \tilde{\lambda}_\tau^-(s) \mathcal{D}_\tau(s) ds \right)^2 &\leq T \lambda_T^- \int_0^T e^{2\alpha\tau\eta(s)} \tilde{\lambda}_\tau^-(s) \mathcal{D}_\tau^2(s) ds \\ &\leq \frac{2}{3} (\lambda_T^-)^2 T K^2(T) |\tau|^2 \sum_{n=1}^N (\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n)), \end{aligned}$$

o que nos dá (3.5.2). Similarmente, podemos estimar o termo residual

$$\begin{aligned} \left( \int_0^T e^{\alpha\tau\eta(s)} \tilde{\lambda}_\tau^+(s) d(\overline{U}_\tau(s), \underline{U}_\tau(s)) ds \right)^2 &\leq K^2(T) \sup_{0 \leq t \leq T} (\lambda^+(t))^2 T \int_0^T d^2(\overline{U}_\tau(s), \underline{U}_\tau(s)) \\ &\leq T K^2(T) \sup_{0 \leq t \leq T} (\lambda^+(t))^2 |\tau|^2 \sum_{n=1}^N \frac{d^2(U_\tau^n, U_\tau^{n-1})}{2\tau_n} \\ &\leq B(T) |\tau|^2 \sum_{n=1}^N (\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n)), \end{aligned}$$

onde  $B(T) = T K^2(T) \sup_{0 \leq t \leq T} (\lambda^+(t))^2$ , e então obtemos (3.5.3).  $\square$

A próxima proposição dá uma estimativa do termo residual definido em (3.4.15). Antes, lembramos a notação clássica para o máximo e o mínimo de números reais,  $a \wedge b = \min\{a, b\}$  e  $a \vee b = \max\{a, b\}$ .

**Proposição 3.5.2.** *Assuma as mesmas hipóteses do Lema 3.3.8. Fixe  $T > 0$ . Sejam  $\tau, \eta$  duas partições de  $(0, \infty)$  e escolha  $N, K \in \mathbb{N}$  tais que  $T \in (t_\tau^{N-1}, t_\tau^N] \cap (t_\eta^{K-1}, t_\eta^K]$ . Então,*

$$\int_0^T G_{\tau\eta}^+(t) dt \leq C(|\tau| + |\eta|), \quad (3.5.5)$$

onde  $C$  é uma constante que depende apenas de  $T, S, \tau^*$  e  $\mathcal{E}$ .

*Demonstração.* Argumentamos da seguinte maneira: para  $t_\tau^1$ , o segundo elemento da partição  $\tau$ , escolha  $k_1 \in \mathbb{N}$  como sendo o maior inteiro satisfazendo  $t_\eta^{k_1-1} < t_\tau^1$ . Se  $t_\eta^{k_1} = t_\tau^1$ , definimos  $J_\tau^1 = I_\tau^1$ , caso contrário escolhemos o maior  $n_1 \leq N$  tal que  $t_\tau^{n_1} < t_\eta^{k_1}$  e definimos  $J_\tau^1 = I_\tau^1 \cup \dots \cup I_\tau^{n_1}$ . Em qualquer caso, observando que  $\mathcal{T}_\eta(t_\tau^{n_1}) = t_\eta^{k_1}$ , obtemos



a estimativa

$$\begin{aligned} \int_{J_\tau^1} (1 - l_\tau(t)) \int_{\mathcal{T}_\tau(t) \wedge \mathcal{T}_\eta(t)}^{\mathcal{T}_\tau(t) \vee \mathcal{T}_\eta(t)} \beta(s) \, ds \, dt &\leq \int_{J_\tau^1} (1 - l_\tau(t)) \, dt \int_0^{\mathcal{T}_\tau(t_\tau^{n_1}) \vee \mathcal{T}_\eta(t_\tau^{n_1})} \beta(s) \, ds \\ &\leq (|\tau| + |\eta|) \int_0^{t_\eta^{k_1}} \beta(s) \, ds. \end{aligned}$$

Continuando, se fosse  $t_\tau^{n_1+1} = t_\eta^{k_1}$ , definimos  $J_\tau^2 = I_\tau^{n_1+1}$ , caso contrário escolhemos o máximo  $k_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $t_\eta^{k_2-1} < t_\tau^{n_1+1}$ , onde pode acontecer que  $t_\eta^{k_2} = t_\tau^{n_1+1}$  e em tal caso escolhemos novamente  $J_\tau^2 = I_\tau^{n_1+1}$ . Na outra possibilidade, escolhemos o maior  $n_2 \leq N$  tal que  $t_\tau^{n_2} < t_\eta^{k_2}$  e definimos  $J_\tau^2 = I_\tau^{n_1+1} \cup \dots \cup I_\tau^{n_2}$ . Observando que  $\mathcal{T}_\eta(t_\tau^{n_2}) = t_\eta^{k_2}$  e que  $\mathcal{T}_\tau(t) \geq t_\tau^{n_1+1}$  para  $t \in J_\tau^2$ , podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_{J_\tau^2} (1 - l_\tau(t)) \int_{\mathcal{T}_\tau(t) \wedge \mathcal{T}_\eta(t)}^{\mathcal{T}_\tau(t) \vee \mathcal{T}_\eta(t)} \beta(s) \, ds \, dt &\leq \int_{J_\tau^2} (1 - l_\tau(t)) \, dt \int_{t_\tau^{n_1+1} \wedge \mathcal{T}_\eta(t_\tau^{n_1})}^{\mathcal{T}_\tau(t_\tau^{n_2}) \vee \mathcal{T}_\eta(t_\tau^{n_2})} \beta(s) \, ds \\ &\leq (|\tau| + |\eta|) \int_{t_\eta^{k_1}}^{t_\eta^{k_2}} \beta(s) \, ds. \end{aligned}$$

Após uma quantidade finita de passos, até chegar no intervalo  $I_\tau^N$ , paramos o processo. Somando tais estimativas, obtemos

$$\int_0^T (1 - l_\tau(t)) \int_{\mathcal{T}_\tau(t) \wedge \mathcal{T}_\eta(t)}^{\mathcal{T}_\tau(t) \vee \mathcal{T}_\eta(t)} \beta(s) \, ds \, dt \leq (|\tau| + |\eta|) \int_0^{T+\tau^*} \beta(s) \, ds, \quad (3.5.6)$$

e analogamente

$$\int_0^T l_\tau(t) \int_{\mathcal{T}_\tau(t) \wedge \mathcal{T}_\eta(t)}^{\mathcal{T}_\tau(t) \vee \mathcal{T}_\eta(t)} \beta(s) \, ds \, dt \leq (|\tau| + |\eta|) \int_0^{T+\tau^*} \beta(s) \, ds. \quad (3.5.7)$$

Somando (3.5.6) e (3.5.7), chegamos a

$$\int_0^T \int_{\mathcal{T}_\tau(t) \wedge \mathcal{T}_\eta(t)}^{\mathcal{T}_\tau(t) \vee \mathcal{T}_\eta(t)} \beta(s) \, ds \, dt \leq 2(|\tau| + |\eta|) \int_0^{T+\tau^*} \beta(s) \, ds. \quad (3.5.8)$$

Finalmente, usando a primeira desigualdade de (3.3.8) no Lema 3.3.8, obtemos

$$\begin{aligned} G_{\tau\eta}^+(t) &\leq 2(1 - l_\tau(t)) \int_{\mathcal{T}_\tau(t) \wedge \mathcal{T}_\eta(t)}^{\mathcal{T}_\tau(t) \vee \mathcal{T}_\eta(t)} \beta(s) \, ds (1 + d^2(u^*, \overline{U}_\tau)(t)) \\ &\quad + 2l_\tau(t) \int_{\mathcal{T}_\tau(t) \wedge \mathcal{T}_\eta(t)}^{\mathcal{T}_\tau(t) \vee \mathcal{T}_\eta(t)} \beta(s) \, ds (1 + d^2(u^*, \underline{U}_\tau)(t)) \\ &\leq C(S, T, \tau^*, \mathcal{E}) \int_{\mathcal{T}_\tau(t) \wedge \mathcal{T}_\eta(t)}^{\mathcal{T}_\tau(t) \vee \mathcal{T}_\eta(t)} \beta(s) \, ds. \end{aligned}$$

Assim, usando (3.5.8) segue o resultado desejado.  $\square$

Agora, mostramos que as soluções aproximadas definidas em (3.4.8) convergem uni-

formemente em  $[0, T]$  para uma curva. Como veremos na próxima seção, tal curva limite é absolutamente contínua e é a solução do sistema (3.0.1)-(3.0.2) no sentido da definição 3.1.1.

**Teorema 3.5.3.** *Assuma as condições (E1)-(E5). Mais ainda, assuma que*

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} d(U_\tau^0, u_0) = 0, \quad \sup_{\tau} \mathcal{E}(0, U_\tau^0) = S < \infty, \quad (3.5.9)$$

para algum  $u_0 \in \mathbf{D}$ . Então, as soluções aproximadas  $\bar{U}_\tau$  e  $\underline{U}_\tau$ , geradas pela família  $U_\tau^0$ , convergem uniformemente em  $[0, T]$  quando  $|\tau| \rightarrow 0$  para uma função  $u : [0, \infty) \rightarrow X$ . Além disso, a curva  $u$  não depende da família de dados iniciais  $U_\tau^0$  convergindo para  $u_0$ .

*Demonstração.* Fixado  $T > 0$ , pelo Lema 3.3.8, sabemos que para partições  $\tau$  com tamanho suficientemente pequeno, valem as desigualdades

$$d^2(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) \leq |\tau|C \text{ e } \sum_{n=1}^N \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n) - \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^{n-1}) \leq C, \quad (3.5.10)$$

onde  $C$  é uma constante que não depende de  $\tau$  e  $T \in (t_\tau^{N-1}, t_\tau^N]$ . Dadas duas partições  $\tau$ ,  $\eta$ , temos as estimativas

$$\begin{aligned} d(\bar{U}_\tau(t), \bar{U}_\eta(t)) &\leq (1 - l_\eta(t))(1 - l_\tau(t))d(\underline{U}_\tau(t), \underline{U}_\eta(t)) + l_\eta(t)(1 - l_\tau(t))d(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\eta(t)) \\ &\quad + (1 - l_\eta(t))l_\tau(t)d(\bar{U}_\tau(t), \underline{U}_\eta(t)) + l_\eta(t)l_\tau(t)d(\bar{U}_\tau(t), \bar{U}_\eta(t)) \\ &\quad + (1 - l_\eta(t))l_\tau(t)d(\bar{U}_\eta(t), \underline{U}_\eta(t)) + l_\eta(t)(1 - l_\tau(t))d(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) \\ &\quad + (1 - l_\eta(t))(1 - l_\tau(t)) \left( d(\underline{U}_\tau(t), \underline{U}_\eta(t)) - d(\bar{U}_\tau(t), \bar{U}_\eta(t)) \right) \\ &\leq d_{\tau\eta}(t, t) + (1 - l_\eta(t))(1 - l_\tau(t)) \left( d(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) + d(\underline{U}_\eta(t), \bar{U}_\eta(t)) \right) \\ &\quad + (1 - l_\eta(t))l_\tau(t)d(\bar{U}_\eta(t), \underline{U}_\eta(t)) + l_\eta(t)(1 - l_\tau(t))d(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) \\ &\leq d_{\tau\eta}(t, t) + d(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) + d(\underline{U}_\eta(t), \bar{U}_\eta(t)). \end{aligned}$$

Assim, para partições com tamanhos suficientemente pequenos, usando as desigualdades em (3.5.10), obtemos

$$\begin{aligned} d^2(\bar{U}_\tau(t), \bar{U}_\eta(t)) &\leq 3 \left( d_{\tau\eta}^2(t, t) + d^2(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) + d^2(\underline{U}_\eta(t), \bar{U}_\eta(t)) \right) \\ &\leq 3d_{\tau\eta}^2(t, t) + 3C(|\tau| + |\eta|). \end{aligned}$$

Agora, pelo corolário 3.4.4, o Lema 3.5.1 e a Proposição 3.5.2, obtemos que

$$d_{\tau\eta}^2(t, t) \leq Cd^2(U_\tau^0, U_\eta^0) + C(|\tau| + |\eta|) + C(|\tau|^2 + |\eta|^2),$$

onde a constante  $C$  não depende das partições e pode mudar de linha para linha. Isto mostra que a família  $\bar{U}_\tau$  é de Cauchy e, por ser  $X$  um espaço completo, ela é convergente. Mais

ainda, ela converge uniformemente no intervalo  $[0, T]$  para uma função  $u : [0, \infty) \rightarrow X$ . Finalmente, seja  $V_\tau^0$  uma outra família satisfazendo as condições em (3.5.9). Denotamos por  $\tilde{u}$  a curva limite de  $\bar{V}_\tau(t)$  e consideremos uma nova família  $W_\tau^0$  tomando sequências  $\tau_n$  e  $\tau_{n'}$  disjuntas. Então, basta notar que toda a análise feita é válida para a família  $W_\tau^0$  e portanto as soluções aproximadas convergem uniformemente em  $[0, T]$  para uma curva. Por um argumento de restrição para subsequências concluímos que  $\tilde{u} = u$ .  $\square$

*Observação 3.5.4.* Observe que a condição (3.5.9) e a semi-continuidade inferior do funcional nos leva a assumir que  $u_0 \in \mathbf{D}$ . De fato, a convergência das soluções aproximadas é válida para dados iniciais em  $\bar{\mathbf{D}}$ . O argumento é padrão e nós o omitimos aqui. Porém, assumimos tal fato para posterior referência.

## 3.6 Regularidade

Agora mostramos que a função obtida na seção anterior é de fato uma solução no sentido da definição 3.1.1. Começamos lembrando a seguinte interpolação.

**Definição 3.6.1** (Interpolação de De Giorgi). Seja  $(U_\tau^n)_{n=0}^\infty$  uma solução discreta do esquema variacional (3.2.3). Definimos a interpolação

$$\tilde{U}_\tau(t) = \tilde{U}_\tau(t_\tau^{n-1} + \delta) \quad t \in (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n] \text{ e } \delta = t - t_\tau^{n-1},$$

como o único minimizador do funcional

$$v \in X \rightarrow \mathbf{E}(t_\tau^{n-1} + \delta, \delta, U_\tau^n, v).$$

Agora, mostramos que a interpolação acima converge pelo menos pontualmente para a mesma curva obtida no Teorema 3.5.3.

**Proposição 3.6.2.** *Assuma as mesmas hipóteses do Teorema 3.5.3. Para  $T > 0$  fixo, temos a estimativa*

$$d^2(\bar{U}_\tau(t), \tilde{U}_\tau(t)) \leq |\tau| \left( C + \frac{t - \mathcal{S}_\tau(t)}{\mathcal{T}_\tau(t) - t} \int_t^{\mathcal{T}_\tau(t)} \beta(r) \, dr \right), \quad (3.6.1)$$

em  $[0, T]$  e para alguma constante  $C$  que não depende de  $\tau$ . Em particular, a curva  $\tilde{U}_\tau$  converge em quase todo  $t \in [0, T]$  para a curva  $u$  dada no Teorema 3.5.3. Mas ainda, se  $\beta$  é localmente limitada, a convergência é localmente uniforme.

*Demonstração.* Com efeito, fixado  $T > 0$ , primeiro mostremos que o esquema discreto  $(U_\tau^n)_{n=0}^N$  satisfaz

$$\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n) \leq \mathcal{E}(t_\tau^0, U_\tau^0) + C, \quad (3.6.2)$$

onde  $T \in (t_\tau^{N-1}, t_\tau^N]$ . De fato, desde que  $U_\tau^n$  minimiza o esquema de Euler (3.2.3), temos que

$$\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n) \leq \mathcal{E}(t_\tau^{n-1}, U_\tau^{n-1}) + \int_{t_\tau^{n-1}}^{t_\tau^n} \beta(r) \, dr (1 + d(u^*, U_\tau^{n-1})).$$

Lembrando que  $d(u^*, U_\tau^{n-1})$  é limitado por uma constante  $C$ , que depende apenas de  $T$  e parâmetros que não dependem de  $\tau$ , e continuando indutivamente chegamos a

$$\mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n) \leq \mathcal{E}(t_\tau^0, U_\tau^0) + C \int_0^{T+\tau^*} \beta(r) \, dr,$$

donde segue a afirmação, após renomear as constantes. Por outro lado, usando a segunda desigualdade no Lema 3.3.4 e a estimativa (3.6.2), temos que

$$\begin{aligned} d(\tilde{U}_\tau(t), u^*) &\leq 4\tau^* \left( \mathcal{E}(t_\tau^{n-1}, \underline{U}_\tau(t)) + C(1 + d^2(u^*, \underline{U}_\tau(t))) \right) \\ &\leq 4\tau^* (\mathcal{E}(0, U_\tau^0) + C), \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

para toda  $t \in [0, T]$ . Finalmente, usando a notação  $\delta = t - t_\tau^{n-1}$  para  $t \in (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n]$  e a propriedade de minimização de  $\tilde{U}_\tau(t)$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\underline{U}_\tau(t), \tilde{U}_\tau(t))}{2\delta} + \mathcal{E}(t, \tilde{U}_\tau(t)) &\leq \frac{d^2(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t))}{2\delta} + \mathcal{E}(t, \bar{U}_\tau(t)) \\ &\leq \frac{d^2(\underline{U}_\tau(t), \tilde{U}_\tau(t))}{2\tau_n} + \mathcal{E}(t_\tau^n, \tilde{U}_\tau(t)) + \mathcal{E}(t, \bar{U}_\tau(t)) \\ &\quad - \mathcal{E}(t_\tau^n, \bar{U}_\tau(t)) + \left( \frac{1}{2\delta} - \frac{1}{2\tau_n} \right) d^2(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)), \end{aligned}$$

e, reacomodando os termos, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2\delta} - \frac{1}{2\tau_n} \right) d^2(\underline{U}_\tau(t), \tilde{U}_\tau(t)) &\leq \left( \frac{1}{2\delta} - \frac{1}{2\tau_n} \right) d^2(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) + \int_t^{t_\tau^n} \beta(r) \, dr \\ &\quad \times \left( d^2(u^*, \bar{U}_\tau(t)) + d^2(u^*, \tilde{U}_\tau(t)) \right). \end{aligned}$$

Assim, usando (3.6.3) e lembrando que  $\mathcal{E}(0, U_\tau^0) \leq S$ , obtemos (3.6.1). Segue a convergência nos pontos de Lebesgue de  $\beta$  e, além disso, se  $\beta$  é localmente limitada então tal convergência é uniforme em  $[0, T]$ .  $\square$

O lema abaixo é um resultado que nos permite obter a continuidade absoluta quando tivermos um certo tipo de controle nas diferenças.

**Lema 3.6.3.** *Seja  $T > 0$  e  $f, g, \beta \in L^1([0, T])$  tais que*

$$|f(t) - f(s)| \leq (g(t) + g(s))|t - s| + \int_s^t \beta(r) \, dr,$$

para  $s < t$ . Então,  $f \in W^{1,1}([h, T-h])$  para toda  $0 < h < T/2$ .

*Demonstração.* De fato, primeiro observamos que a função  $t \rightarrow \int_0^t \beta(r) dr$  é absolutamente contínua em  $[0, T]$  e portanto está em  $W^{1,1}([0, T])$ . Pela caracterização via quociente de diferenças do espaço de Sobolev, temos que

$$\sup_{0 < |\tilde{h}| < h} \int_h^{T-h} \left| \frac{1}{\tilde{h}} \int_t^{t+\tilde{h}} \beta(r) dr \right| dt < \infty. \quad (3.6.4)$$

Usando a notação

$$\Delta_{\tilde{h}}(f)(t) = \frac{f(t+\tilde{h}) - f(t)}{\tilde{h}},$$

temos a estimativa

$$\begin{aligned} \int_h^{T-h} |\Delta_{\tilde{h}}(f)(t)| dt &\leq \int_h^{T-h} g(t) + g(t+\tilde{h}) + \left| \frac{1}{\tilde{h}} \int_t^{t+\tilde{h}} \beta(r) dr \right| dt \\ &\leq 2 \|g\|_{L^1} + \int_h^{T-h} \left| \frac{1}{\tilde{h}} \int_t^{t+\tilde{h}} \beta(r) dr \right| dt. \end{aligned}$$

Usando então a estimativa (3.6.4) e a caracterização por quociente de diferenças obtemos a conclusão desejada.  $\square$

Agora, mostramos que a curva  $u$  obtida no Teorema 3.5.3 é uma solução do fluxo gradiente dependendo do tempo no sentido da definição 3.1.1.

**Teorema 3.6.4.** *Assuma as condições (E1)-(E5). A curva  $u : [0, \infty) \rightarrow X$  obtida no Teorema 3.5.3 é localmente absolutamente contínua e a derivada métrica  $|u'| \in L^2_{loc}([0, \infty))$ . Além disso, se os pontos de diferenciabilidade da função  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u)$  não depende de  $u \in \mathbf{D}$ , se a derivada em relação a  $t$  é semicontínua superiormente na variável  $u$  (com relação à métrica  $d$ ), e a seguinte condição*

$$t_n \downarrow t, d(u_n, u) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}(t_n, u_n) - \mathcal{E}(t, u_n)}{t_n - t} \geq \partial_t \mathcal{E}(t, u) \quad (3.6.5)$$

*é válida, a menos de subsequência. Então, a função  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u(t))$  é absolutamente contínua e satisfaz a identidade de energia*

$$\mathcal{E}(t, u(t)) - \mathcal{E}(s, u(s)) = \int_s^t \partial_t \mathcal{E}(r, u(r)) dr - \frac{1}{2} \int_s^t |u'|^2(r) dr - \frac{1}{2} \int_s^t |\partial \mathcal{E}(r)|^2(u(r)) dr. \quad (3.6.6)$$

*Em particular, a curva  $u$  é uma solução de (3.0.1)-(3.0.2).*

*Demonstração.* Como sempre, fixamos um intervalo  $[0, T]$ . Definimos a derivada discreta da curva  $\bar{U}_\tau(t)$  por

$$|U'_\tau|(t) = \frac{d(U_\tau^{n-1}, U_\tau^n)}{\tau_n},$$

para  $t \in (t_{\tau}^{n-1}, t_{\tau}^n]$ . Segue do Lema 3.3.8 que

$$\int_0^T |U'_{\tau}|^2(t) dt \leq C. \quad (3.6.7)$$

Logo, podemos extrair uma sequência  $\tau_k$  tal que  $|\tau_k| \rightarrow 0$  e  $|U'_{\tau_k}|$  converge fracamente em  $L^2([0, T])$  para alguma função  $m \in L^2([0, T])$ . Sejam  $0 \leq s < t \leq T$  e  $p = p(s)$ ,  $n = n(t) \in \mathbb{N}$  tais que  $s \in (t_{\tau_k}^{p-1}, t_{\tau_k}^p]$  e  $t \in (t_{\tau_k}^{n-1}, t_{\tau_k}^n]$ . Então, usando a desigualdade triangular,

$$d(\overline{U}_{\tau_k}(s), \overline{U}_{\tau_k}(t)) \leq \int_{t_{\tau_k}^{p-1}}^{t_{\tau_k}^n} |U_{\tau_k}|(r) dr.$$

Aplicando  $\liminf$  quando  $k \rightarrow \infty$  e usando a convergência fraca, temos que

$$d(u(s), u(t)) \leq \int_s^t m(r) dr,$$

e, portanto,  $u$  é absolutamente contínua. Além disso, temos que  $|u'| \in L_{loc}^2(0, \infty)$  e  $|u'|(t) \leq m(t)$  em quase todo ponto de  $[0, \infty)$ .

Por outro lado, fazendo uma mudança de variáveis, podemos reescrever a identidade (3.3.3) para as soluções discretas como

$$\begin{aligned} \frac{d^2(U_{\tau}^{n-1}, U_{\tau}^n)}{2\tau_n} + \int_{t_{\tau}^{n-1}}^{t_{\tau}^n} \frac{d^2(U_{\tau}^{n-1}, \tilde{U}_{\tau}(r))}{2r^2} dr &= \int_{t_{\tau}^{n-1}}^{t_{\tau}^n} \partial_t \mathcal{E}(r, \tilde{U}_{\tau}(r)) dr \\ &+ \mathcal{E}(t_{\tau}^{n-1}, U_{\tau}^{n-1}) - \mathcal{E}(t_{\tau}^n, U_{\tau}^n). \end{aligned}$$

Somando, desde 1 até um certo  $n$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{t_{\tau}^n} |U'_{\tau}|^2(r) dr + \int_0^{t_{\tau}^n} \frac{d^2(\overline{U}_{\tau}(r), \tilde{U}_{\tau}(r))}{2r^2} dr &= \int_0^{t_{\tau}^n} \partial_t \mathcal{E}(r, \tilde{U}_{\tau}(r)) dr \\ &+ \mathcal{E}(0, U_{\tau}^0) - \mathcal{E}(t_{\tau}^n, U_{\tau}^n). \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Agora, observe que para a sequência  $\tau_k$  obtida acima, temos

$$\mathcal{E}(t, u(t)) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(t, \overline{U}_{\tau_k}(t)) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\tau_k}(t), \overline{U}_{\tau_k}(t)).$$

Logo, usando o Lema 1.1.6 e o Teorema 1.1.7, para  $t \in [0, T]$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^t |u'|^2(r) dr + \frac{1}{2} \int_0^t |\partial \mathcal{E}(r)|^2(u(r)) dr + \mathcal{E}(t, u(t)) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}_{\tau_k}(t)} |U'_{\tau_k}|^2(r) dr + \int_0^{\mathcal{T}_{\tau_k}(t)} \frac{d^2(\overline{U}_{\tau_k}(r), \tilde{U}_{\tau_k}(r))}{2r^2} dr + \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\tau_k}(t), \overline{U}_{\tau_k}) \right) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\mathcal{T}_{\tau_k}(t)} \partial_t \mathcal{E}(r, \tilde{U}_{\tau_k}(r)) dr + \mathcal{E}(0, u(0)) \\ &\leq \int_0^t \partial_t \mathcal{E}(r, u(r)) dr + \mathcal{E}(0, u_0), \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

onde escolhemos  $U_\tau^0 = u_0$ , já que a curva  $u$  não depende da família que aproxima o dado inicial, veja Teorema 3.5.3. Note que podemos concluir também que  $\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}(t, u(t)) < \infty$ .

Reciprocamente, vamos mostrar que a função  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u(t))$  é absolutamente contínua. Em vista do Lema 1.1.3, sabemos que existe uma função  $\mathbf{s} : [0, T] \rightarrow [0, L]$  absolutamente contínua, crescente, com inversa Lipschitz e uma curva  $\hat{u} : [0, L] \rightarrow X$  com  $|\hat{u}'|(t) \leq 1$  e  $u(t) = \hat{u}(\mathbf{s}(t))$ . Denotemos por  $\mathbf{t} : [0, L] \rightarrow [0, T]$  a inversa de  $\mathbf{s}$  e a função  $\varphi(s) = \mathcal{E}(\mathbf{t}(s), \hat{u}(s))$ . Então, usando o Teorema 1.1.7, temos que

$$\begin{aligned} \varphi(s_1) - \varphi(s_2) &\leq \left( |\partial \mathcal{E}(\mathbf{t}(s_1))|(\hat{u}(s_1)) - \frac{1}{2} \lambda(t) d(\hat{u}(s_1), \hat{u}(s_2)) \right) d(\hat{u}(s_1), \hat{u}(s_2)) \\ &\quad + \int_{\mathbf{t}(s_1)}^{\mathbf{t}(s_2)} \beta(r) dr (1 + d^2(u^*, \hat{u}(s_2))) \\ &\leq \left( |\partial \mathcal{E}(\mathbf{t}(s_1))|(\hat{u}(s_1)) + \lambda_0^- C \right) |s_2 - s_1| + (1 + C^2) \int_{s_1}^{s_2} \beta(\mathbf{t}(s)) \mathbf{t}'(s) ds, \end{aligned}$$

para  $s_1 < s_2$ , onde  $C = \sup_{s \in [0, L]} d(u^*, \hat{u}(s))$ . Invertendo os papéis de  $s_1$  e  $s_2$ , podemos obter facilmente que

$$\begin{aligned} |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| &\leq \left( |\partial \mathcal{E}(\mathbf{t}(s_1))|(\hat{u}(s_1)) + |\partial \mathcal{E}(\mathbf{t}(s_2))|(\hat{u}(s_2)) + 2\lambda_0^- C \right) |s_2 - s_1| \\ &\quad + (1 + C^2) \int_{s_1}^{s_2} \beta(\mathbf{t}(s)) \mathbf{t}'(s) ds, \end{aligned}$$

para  $s_1 < s_2$ . Usando o Lema 3.6.3 obtemos que  $\varphi$ , e portanto  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u(t))$ , é absolutamente contínua. Logo, ela é derivável em quase todo ponto em relação a medida de Lebesgue. Seja agora  $t_0$  um ponto onde  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u(t))$  é derivável e a derivada métrica de  $u$  existe. Então, dada uma sequência  $t_n \downarrow t_0$  e usando (3.6.5), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}(t_n, u(t_n)) - \mathcal{E}(t_0, u(t_0))}{t_n - t_0} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}(t_n, u(t_n)) - \mathcal{E}(t_0, u(t_n))}{t_n - t_0} \\ &\quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}(t_0, u(t_n)) - \mathcal{E}(t_0, u(t_0))}{d(u(t_n), u(t_0))} \frac{d(u(t_n), u(t_0))}{t_n - t_0} \\ &= \partial_t \mathcal{E}(t_0, u(t_0)) - |\partial \mathcal{E}(t_0)|(\hat{u}(t_0)) |u'|(\hat{u}(t_0)). \end{aligned}$$

Integrando e usando (3.6.9), facilmente obtemos (3.6.6). □

Como uma consequência importante, temos o corolário abaixo.

**Corolário 3.6.5.** *Assuma as mesmas hipóteses do Teorema 3.6.4. Então, existe uma sequência de partições  $\tau_k$  tal que a interpolação  $\mathcal{E}_{\tau_k}(t)$  definida em (3.4.7) converge para a função  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u(t))$  in  $L_{loc}^1([0, \infty))$ , e portanto em quase todo ponto (a menos de subseqüência), onde  $u$  é dada pelo Teorema 3.5.3.*

*Demonstração.* Basta mostrar que as funções  $f_\tau$  e  $g_\tau$  definidas por

$$f_\tau(t) = \mathcal{E}(t_\tau^n, U_\tau^n), \text{ para } t \in (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n]$$

e

$$g_{\tau}(t) = \mathcal{E}(t_{\tau}^{n-1}, U_{\tau}^{n-1}), \text{ para } t \in (t_{\tau}^{n-1}, t_{\tau}^n],$$

convergem para  $t \rightarrow \mathcal{E}(t, u(t))$  em  $L^1([0, T])$  quando  $|\tau| \rightarrow 0$  a menos de subsequência. Primeiro, note que para cada partição  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_L = T\}$  podemos limitar a variação pontual de  $f_{\tau}$  por

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^L |f_{\tau}(t_l) - f_{\tau}(t_{l-1})| &\leq \sum_{n=1}^N (\mathcal{E}(t_{\tau}^n, U_{\tau}^{n-1}) - \mathcal{E}(t_{\tau}^n, U_{\tau}^n)) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \int_{t_{\tau}^{n-1}}^{t_{\tau}^n} \beta(s) ds (1 + d^2(u^*, U_{\tau}^{n-1})), \end{aligned}$$

onde, pelo Lema 3.3.8, os dois somatórios são limitados por uma constante que não depende de  $\tau$  nem de  $N$ . Portanto,  $f_{\tau}$  possui variação pontual uniformemente limitada, e então também possui variação essencial uniformemente limitada. Analogamente, temos que  $g_{\tau}$  possui variação essencial uniformemente limitada. Logo, podemos usar o Teorema de compacidade para funções de variação limitada. Precisamente, pelo Teorema [13, teorema 4, capítulo 5], existem funções  $A, B \in L^2([0, T])$  tais que, a menos de subsequência,  $f_{\tau_k} \rightarrow A$  e  $g_{\tau_k} \rightarrow B$  em  $L^1$ . Além disso, desde que

$$\begin{aligned} \int_0^T |f_{\tau}(t) - g_{\tau}(t)| dt &\leq \sum_{n=1}^N \tau_n |\mathcal{E}(t_{\tau}^n, U_{\tau}^n) - \mathcal{E}(t_{\tau}^{n-1}, U_{\tau}^{n-1})| \\ &\leq |\tau| C, \end{aligned}$$

temos que  $A = B$  q.t.p. em  $[0, T]$ . Também, pela convergência em quase todo ponto e a semicontinuidade inferior de  $\mathcal{E}(t, \cdot)$  segue que  $A(t) \geq \mathcal{E}(t, u(t))$ . De fato, é possível mostrar a igualdade como segue

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^t |u'|^2(r) dr + \frac{1}{2} \int_0^t |\partial \mathcal{E}(r)|^2(u(r)) dr + A(t) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}_{\tau_k}(t)} |U'_{\tau_k}|^2(r) dr + \int_0^{\mathcal{T}_{\tau_k}(t)} \frac{d^2(\overline{U}_{\tau_k}(r), \tilde{U}_{\tau_k}(r))}{2r^2} dr \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\tau_k}(t), \overline{U}_{\tau_k}) \right) \\ &\leq \int_0^t \partial_t \mathcal{E}(r, u(r)) dr + \mathcal{E}(0, u_0). \end{aligned}$$

Pela identidade (3.6.6), segue a igualdade procurada.  $\square$

*Observação 3.6.6.* Note que a identidade de energia (3.6.6) implica em particular que  $u(t) \in \text{Dom}(|\partial \mathcal{E}(t)|)$  para quase todo  $t \in (0, \infty)$ .



### 3.7 Uma propriedade de contração

Nesta seção, mostramos a propriedade chamada de  $\lambda$ -contração. Tal propriedade é essencialmente uma consequência da condição de convexidade (E5) e ela nos dá informação sobre o comportamento assintótico de soluções dadas pelo Teorema 3.5.3. Precisamente, temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.7.1.** *Assuma que a função  $\lambda$  dada em (E5) é contínua. Para  $u_0, v_0 \in \overline{D}$ , sejam  $u, v$  as correspondentes soluções dadas pelo Teorema 3.5.3. Então,*

$$d(u(t), v(t)) \leq e^{-\int_s^t \lambda(r) dr} d(u(s), v(s)), \quad (3.7.1)$$

para  $s < t$ .

*Demonstração.* Note que, como consequência do Teorema 3.5.3, temos que  $d_\tau(t, V) \rightarrow d(u(t), V)$  uniformemente em  $[0, T]$ . Além disso, pela continuidade de  $\lambda$ , temos que  $\tilde{\lambda}_\tau \rightarrow \lambda$  uniformemente em  $[0, T]$ , onde as convergências anteriores são quando  $|\tau| \rightarrow 0$ . Por outro lado, pelo corolário 3.6.5, temos também a convergência

$$\int_s^t \mathcal{E}_{\tau_k}(r) dr \rightarrow \int_s^t \mathcal{E}(r, u(r)) dr, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

para alguma subsequência  $|\tau_k| \rightarrow 0$ . Tendo em conta estas considerações, podemos integrar de  $s$  até  $t$  na desigualdade diferencial (3.4.12) no Lema 3.4.2 e passar o limite quando  $|\tau_k| \rightarrow 0$ . Lembrando que os termos residuais vão para zero, chegamos a

$$\frac{1}{2}d^2(u(t), V) - \frac{1}{2}d^2(u(s), V) + \int_s^t \frac{\lambda(r)}{2}d^2(u(r), V) + \mathcal{E}(r, u(r)) dr \leq \int_s^t \mathcal{E}(r, V)dr. \quad (3.7.2)$$

Por outro lado, desde que as curvas  $u$  e  $v$  são absolutamente contínuas e portanto limitadas localmente, vale a estimativa

$$\begin{aligned} |d^2(u(t), v(s)) - d^2(u(t'), v(s))| &\leq d(u(t), u(t'))(d(u(t), v(s)) + d(u(t'), v(s))) \\ &\leq C(T) \int_{t'}^t |u'(r)| dr, \end{aligned}$$

onde  $C(T) = 2 \sup_{0 \leq t \leq T} (d(u(t), u^*) + d(v(t), u^*))$ . Deste modo, temos que a função  $F(t, s) = d^2(u(t), v(s))$  é absolutamente contínua em relação a  $t$ , uniformemente em relação a  $s$ , no intervalo  $[0, T]$ . De maneira análoga mostra-se que  $F(t, s)$  é absolutamente contínua em relação a  $s$  uniformemente em relação a  $t$  no intervalo  $[0, T]$ . Isto nos permite aplicar o Lema 1.1.9, de onde concluímos que a função  $\delta(t) := F(t, t) = d^2(u(t), v(t))$  é absolutamente contínua e sua derivada satisfaz a limitação (1.1.11). Usando agora (3.7.2), segue

que

$$\frac{1}{2} \limsup_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{d^2(u(t+h), v(t)) - d^2(u(t), v(t))}{h} \right) + \frac{\lambda(t)}{2} d^2(u(t), v(t)) + \mathcal{E}(t, u(t)) \leq \mathcal{E}(t, v(t)).$$

Analogamente, para a curva  $v$  temos que

$$\frac{1}{2} \limsup_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{d^2(u(t), v(t)) - d^2(u(t), v(t-h))}{h} \right) + \frac{\lambda(t)}{2} d^2(u(t), v(t)) + \mathcal{E}(t, v(t)) \leq \mathcal{E}(t, u(t)).$$

Somando estas duas últimas contribuições e lembrando (1.1.11), obtemos

$$\frac{d}{dt} d^2(u(t), v(t)) + 2\lambda(t) d^2(u(t), v(t)) \leq 0. \quad (3.7.3)$$

Uma integração direta nos dá (3.7.1). □

Finalizamos este capítulo com um comentário.

*Observação 3.7.2.* Podem acontecer muitas situações de acordo com o comportamento de  $\lambda$ . Nesta direção, estamos mais interessados em saber quando soluções diferentes se aproximam. Por exemplo, pode acontecer que até um certo tempo a  $\lambda(t)$ -convexidade de  $\mathcal{E}(t, \cdot)$  seja negativa, mas se depois de tal tempo esta convexidade fosse tornando-se positiva, de tal maneira que  $\int_0^t \lambda(s) ds$  fique positivo, então as soluções podem se aproximar com uma certa taxa. É interessante notar que esta flexibilidade no comportamento das soluções não é válida para funcionais que não dependem do tempo  $t$ .

# Capítulo 4

## Aplicações para o espaço de Wasserstein

Neste capítulo apresentamos aplicações da teoria desenvolvida no capítulo 3 para funcionais dependentes do tempo, no espaço de Wasserstein. Veremos que as curvas associadas a tais funcionais, resolvem certas equações diferenciais parciais com coeficientes que dependem do tempo. Para o caso de equações do tipo parabólico com coeficiente de difusão dependendo do tempo, veremos que a teoria não é diretamente aplicável porém é possível adaptar os argumentos do capítulo 3 para reobter os mesmos resultados. Começamos analisando o caso de difusão constante. Neste capítulo trabalhamos no caso em que  $X = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  é o espaço de Wasserstein definido na seção 1.2 com a métrica de Wasserstein  $\mathbf{d}_2$  quadrática definida em (1.2.4).

Considere os seguintes funcionais:

**Energia potencial dependente do tempo:**  $\mathcal{V} : [0, \infty) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  dada por

$$\mathcal{V}(t, \mu) := \int_{\mathbb{R}^d} V(t, x) d\mu(x). \quad (4.0.1)$$

**Energia de interação dependente do tempo:**  $\mathcal{W} : [0, \infty) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  dada por

$$\mathcal{W}(t, \mu) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} W(t, x, y) d(\mu \otimes \mu)(x, y), \quad (4.0.2)$$

onde  $V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $W : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  são funções satisfazendo certas condições especificadas abaixo.

## 4.1 Equação de Fokker-Planck com potencial dependendo do tempo

Dada uma constante  $\kappa \geq 0$ , a primeira aplicação será para o funcional

$$\mathcal{E}_1(t, \mu) := \kappa \mathcal{F}(\mu) + \mathcal{V}(t, \mu), \quad (4.1.1)$$

onde  $\mathcal{F} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  denota o funcional de energia de interna definida por

$$\mathcal{F}(\mu) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \log(\rho(x)) dx, & \text{se } d\mu(x) = \rho(x)dx, \\ +\infty, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Agora, damos as condições a serem satisfeitas pela função que define o funcional de energia potencial para que o funcional  $\mathcal{E}_1$  cumpra com as condições **(E1)**-(**E5**).

**V1.-** Para cada  $t \geq 0$  fixo, a função  $V(t, \cdot)$  é  $\lambda(t)$ -convexo para alguma função  $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  em  $L_{loc}^\infty([0, \infty))$ , isto é, a função  $V(t, x) - \frac{\lambda(t)}{2}|x|^2$  é convexa.

**V2.-** Denotemos por  $\partial^\circ V(t, x)$  o elemento de norma minimal na subdiferencial de  $V(t, \cdot)$  no ponto  $x \in \mathbb{R}^d$ . Assumimos que  $|\partial^\circ V(t, 0)|$  é localmente limitada e a função  $t \rightarrow V(t, 0)$  é localmente limitada por baixo.

**V3.-** Existe uma função  $\beta \in L_{loc}^1([0, +\infty))$  tal que

$$|V(s, x) - V(t, x)| \leq \int_s^t \beta(r) dr (1 + |x|^2), \text{ for } 0 \leq s < t. \quad (4.1.3)$$

Note que a condição **(V2)** foi assumida para  $x = 0$  apenas por simplicidade. De fato, poderíamos ter assumido tal condição para qualquer outro  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  fixo. Antes de mostrar que o funcional  $\mathcal{E}_1$  satisfaz as condições requeridas mostramos um resultado preliminar.

**Lema 4.1.1.** *Sejam  $\sigma \in \mathcal{P}_{2,ac}(\mathbb{R}^d)$  e  $\mu_k \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  tais que  $\mu_k \rightarrow \mu$  na topologia fraca de medidas. Se  $\mathbf{t}_{\sigma}^{\mu_k}$  e  $\mathbf{t}_{\sigma}^{\mu}$  denotam os respectivos transportes ótimos, então  $\mathbf{t}_{\sigma}^{\mu_k} \rightarrow \mathbf{t}_{\sigma}^{\mu}$  em probabilidade com relação a  $\sigma$ . Em particular, temos convergência  $\sigma$ -q.t.p. a menos de subsequência.*

*Demonstração.* De fato, sabemos que pelo fato de  $\sigma$  ser absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, os planos de transporte entre  $\sigma$  e cada  $\mu_k$  ( $\mu$  resp.) são da forma  $\gamma_k = (I \times \mathbf{t}_{\sigma}^{\mu_k})_{\#} \sigma$  ( $\gamma = (I \times \mathbf{t}_{\sigma}^{\mu})_{\#} \sigma$  resp.). Desde que a família  $\gamma_k$  é tight (ajustada) e cada um dos  $\gamma_k$  possui suporte ciclicamente monótono, é imediato mostrar que  $\gamma_k \rightarrow \gamma$  fracamente.

Agora, dado  $\epsilon > 0$ , escolha  $M_{\epsilon} > 0$  tal que  $\sigma[|\mathbf{t}_{\sigma}^{\mu}| > M_{\epsilon}] < \epsilon/3$  e  $R_{\epsilon} > 0$  tal que  $\sigma[|x| > R_{\epsilon}] < \epsilon/3$ . Uma vez que  $\sigma$  é absolutamente contínua em relação à medida de

Lebesgue, podemos achar um  $\delta > 0$  tal que  $|A| < \delta$  implica  $\sigma(A) < \epsilon/6$ . Considere um truncamento da aplicação  $\mathbf{t}_\sigma^\mu$  denotada por  $g$  na bola fechada  $\bar{B}(R_\epsilon)$ . Mais precisamente,  $g$  é a função cuja imagem coincide com a interseção da imagem de  $\mathbf{t}_\sigma^\mu|_{\bar{B}(R_\epsilon)}$  com a bola  $\bar{B}(M_\epsilon)$ . Pelo Teorema de Lusin, podemos achar uma função contínua  $g_\epsilon$  definida em  $\bar{B}(R_\epsilon)$  tal que  $|G_\epsilon| := |\{x \in \bar{B}(R_\epsilon) : g(x) \neq g_\epsilon(x)\}| < \delta$  e  $\|g_\epsilon\|_\infty = \|g\|_\infty$ . Então, denotando  $A_{k,j} = [|\mathbf{t}_\sigma^\mu(x) - \mathbf{t}_\sigma^{\mu_k}(x)| \geq j^{-1}]$ ,

$$\begin{aligned} \sigma(A_{k,j}) &= \sigma(A_{k,j} \cap \bar{B}(R_\epsilon)^c) + \sigma(A_{k,j} \cap \bar{B}(R_\epsilon) \cap [|\mathbf{t}_\sigma^\mu| > M_\epsilon]) + \sigma(A_{k,j} \cap \bar{B}(R_\epsilon) \cap [|\mathbf{t}_\sigma^\mu| \leq M_\epsilon]) \\ &< 2\epsilon/3 + \sigma(A_{k,j} \cap \bar{B}(R_\epsilon) \cap [|\mathbf{t}_\sigma^\mu| \leq M_\epsilon]). \end{aligned}$$

Assim, para  $B_{k,\epsilon,j} = A_{k,j} \cap \bar{B}(R_\epsilon) \cap [|\mathbf{t}_\sigma^\mu| \leq M_\epsilon]$ , temos que

$$\begin{aligned} \sigma(B_{k,\epsilon,j}) &= \gamma_k \left( \{(x, y) : |y - \mathbf{t}_\sigma^\mu(x)| \geq j^{-1}, |x| \leq R_\epsilon, |\mathbf{t}_\sigma^\mu(x)| \leq M_\epsilon\} \right) \\ &= \gamma_k \left( \{(x, y) : |y - g(x)| \geq j^{-1}, |x| \leq R_\epsilon\} \right) \\ &\leq \gamma_k \left( \{(x, y) : |y - g(x)| \geq j^{-1}, |x| \leq R_\epsilon, x \notin G_\epsilon\} \right) + \sigma(G_\epsilon) \\ &\leq \gamma_k \left( \{(x, y) : |y - g_\epsilon(x)| \geq j^{-1}, |x| \leq R_\epsilon\} \right) + \epsilon/6. \end{aligned}$$

Notando que o conjunto  $\{(x, y) : |y - g_\epsilon(x)| \geq j^{-1}, |x| \leq R_\epsilon\}$  é fechado, a convergência fraca da sequência  $\gamma_k$  implica que

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma(B_{k,\epsilon,j}) &\leq \gamma \left( \{(x, y) : |y - g_\epsilon(x)| \geq j^{-1}, |x| \leq R_\epsilon\} \right) + \epsilon/6 \\ &\leq \gamma \left( \{(x, y) : |y - g(x)| \geq j^{-1}, |x| \leq R_\epsilon, x \notin G_\epsilon\} \right) + \sigma(G_\epsilon) + \epsilon/6. \end{aligned}$$

Finalmente, desde que  $g$  coincide com a aplicação de transporte que induz  $\gamma$ , é imediato que a primeira parcela do lado direito é nula. Logo, juntando as estimativas anteriores, chegamos a

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma([|\mathbf{t}_\sigma^\mu(x) - \mathbf{t}_\sigma^{\mu_k}(x)| \geq j^{-1}]) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sigma(A_{k,j}) \leq \epsilon,$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

A seguir, mostramos que de fato o funcional  $\mathcal{E}_1$  satisfaz as condições **(E1)**-(**E5**).

**Proposição 4.1.2.** *Assuma as condições **(V1)**-(**V3**). Assuma também que existe  $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  absolutamente contínua e com função densidade dada por  $d\tilde{\mu} = \tilde{\rho}dx$ , satisfazendo*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\rho} \log(\tilde{\rho}) \, dx < \infty \text{ e } \int_{\mathbb{R}^d} V(0, x) \, d\tilde{\mu}(x) < \infty. \quad (4.1.4)$$

*Então, o funcional  $\mathcal{E}_1$  satisfaz as condições **(E1)**-(**E5**).*

*Demonstração. Prova de (E1):* Usando a desigualdade

$$|V(t, x) - V(0, x)| \leq \int_0^t \beta(s) ds (1 + |x|^2), \quad (4.1.5)$$

e a hipótese (4.1.4), é imediato concluir que  $\mathcal{E}_1(t, \tilde{\mu}) < \infty$  para toda  $t \geq 0$ , donde segue que  $\mathcal{E}_1(t, \cdot)$  é próprio. Por outro lado, temos a desigualdade

$$V(t, x) \geq -A(t) - B(t)|x|^2, \quad (4.1.6)$$

onde  $A, B$  são funções localmente limitadas. Com efeito, pela convexidade dada em (V1) e a definição de subdiferencial, temos que

$$\begin{aligned} V(t, x) &\geq V(t, 0) + \langle \partial^\circ V(t, 0), x \rangle - \frac{\lambda(t)}{2} |x|^2 \\ &\geq V(t, 0) - \frac{1}{2} |\partial^\circ V(t, 0)|^2 - \frac{1}{2} (1 + \lambda(t)) |x|^2. \end{aligned}$$

Assim, escolhendo  $A(t) = -V(t, 0) + \frac{1}{2} |\partial^\circ V(t, 0)|^2$  e  $B(t) = \frac{1}{2} (1 + \lambda(t))$ , segue (4.1.6). Integrando (4.1.6), obtemos a semicontinuidade inferior de  $\mathcal{V}$ . Desde que a energia interna  $\mathcal{F}$  é conhecida ser semicontínua inferiormente em relação à convergência fraca e portanto em relação à métrica de Wasserstein (veja por exemplo [19]), temos que  $\mathcal{E}_1$  satisfaz (E1).

*Prova de (E2):* Uma aplicação direta de (4.1.5) implica que  $\text{Dom}(\mathcal{V}(t, \cdot)) = \text{Dom}(\mathcal{V}(0, \cdot))$  e portanto  $\text{Dom}(\mathcal{E}_1(t, \cdot)) = \text{Dom}(\mathcal{V}(0, \cdot)) \cap \text{Dom}(\mathcal{F})$  não depende de  $t$ . Logo, segue (E2).

*Prova de (E3):* A propriedade (E3) é uma consequência direta de (V3) com  $u^* = \delta_0$ , onde  $\delta_0$  denota a delta de Dirac na origem.

*Prova de E4:* Aqui, considere a estimativa dada em [17]

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho \log(\rho) dx \geq -C(1 + M_2(\mu))^\alpha, \quad (4.1.7)$$

onde  $\alpha \in (0, 1)$  e  $C > 0$  é uma constante dependendo apenas da dimensão  $d$  do  $\mathbb{R}^d$  e  $d\mu = \rho dx \in \mathcal{P}_{2,ac}(\mathbb{R}^d)$ . Deste modo, obtemos de (4.1.7) e (4.1.6) que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}_2^2(\delta_0, \mu)}{2\tau^*} + \mathcal{E}_1(t, \mu) &\geq \frac{1}{2\tau^*} M_2(\mu) - \kappa C(1 + M_2(\mu))^\alpha - A(t) - B(t) M_2(\mu) \\ &= \left( \frac{1}{2\tau^*} - B(t) \right) M_2(\mu) - \kappa C(1 + M_2(\mu))^\alpha - A(t). \end{aligned}$$

Deste modo, fixado  $T > 0$ , podemos achar  $\tau^*(T) = \tau^* > 0$  tal que

$$\frac{1}{2\tau^*} - B(t) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau^*} - (1 + \sup_{t \in [0, T]} \lambda(t)) \right) > 0.$$

Tomando o ínfimo em relação a  $\mu$  e usando (V2) obtemos (E4).

*Prova de (E5):* (E5) é uma consequência direta da convexidade ao longo de geodésicas

generalizadas satisfeita pelos funcionais envolvidos. Relembre o conceito de geodésicas generalizadas dado na definição 1.2.3 (veja página 26)  $\square$

Antes de aplicar os teoremas do capítulo 3 damos mais uma condição que permitirá obter a regularidade necessária no funcional. É claro pela hipótese (V3) que a função  $t \rightarrow V(t, x)$  é diferenciável em quase todo ponto, no entanto o conjunto de pontos de diferenciabilidade depende a priori de  $x \in \mathbb{R}^d$ . Em vista destas observações, precisamos do resultado.

**Proposição 4.1.3.** *Seja  $\kappa \geq 0$  e denote por  $\mathbf{D}_1 = \text{Dom}(\mathcal{E}(t, \cdot))$ . Assuma que o conjunto de pontos de diferenciabilidade da função  $t \rightarrow V(t, x)$  não depende de  $x$ , e.g. se tal função é diferenciável. Então, para cada  $\mu \in \mathbf{D}_1$ , a função  $t \rightarrow \mathcal{E}_1(t, \mu)$  é diferenciável q.t.p., o conjunto de pontos de diferenciabilidade não depende de  $\mu$ , e vale a identidade*

$$\partial_t \mathcal{E}_1(t, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) d\mu(x), \quad (4.1.8)$$

e a derivada  $\partial_t \mathcal{E}_1(t, \mu)$  é semicontínua superiormente na variável  $\mu$ . Além disso, se o potencial  $V$  satisfaz

$$t_k \rightarrow t_0 \text{ e } y_k \rightarrow y_0 \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{V(t_k, y_k) - V(t_0, y_k)}{t_k - t_0} \geq \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, y_0), \quad (4.1.9)$$

então, a menos de subsequência, o funcional  $\mathcal{E}_1$  satisfaz a seguinte propriedade

$$t_k \rightarrow t_0 \text{ e } \mathbf{d}_2(\mu_k, \mu_0) \rightarrow 0 \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_1(t_k, \mu_k) - \mathcal{E}_1(t_0, \mu_k)}{t_k - t_0} \geq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) d\mu_0(x), \quad (4.1.10)$$

nos pontos onde a derivada existe.

*Demonstração.* Primeiro, considere o conjunto  $\Lambda \subset [0, \infty)$  dado pela interseção do conjunto dos pontos de diferenciabilidade da função  $t \rightarrow V(t, x)$ , que não depende de  $x$ , e o conjunto de pontos de Lebesgue da função  $\beta$ . Para  $t \in \Lambda$ , note que

$$\frac{\mathcal{E}_1(t+h, \mu) - \mathcal{E}_1(t, \mu)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{V(t+h, x) - V(t, x)}{h} d\mu(x).$$

Uma vez que

$$\left| \frac{V(t+h, x) - V(t, x)}{h} \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} \beta(s) ds (1 + |x|^2),$$

podemos usar uma versão generalizada do Teorema da convergência monótona de Lebesgue (veja por exemplo [15, pag. 59]) para concluir que a derivada existe em cada ponto de  $\Lambda$ , o qual não depende de  $\mu$  e então (4.1.8) segue imediatamente. A semicontinuidade

superior em relação à métrica de Wasserstein, segue da evidente desigualdade

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) \leq \beta(t)(1 + |x|^2),$$

para  $t \in \Lambda$  e o Lema de Fatou.

Para mostrar (4.1.10) assumamos que  $t_k \rightarrow t_0 \in \Lambda$  e  $\mu_k \rightarrow \mu_0$  na métrica de Wasserstein, e escolha um  $\sigma \in \mathcal{P}_{2,ac}(\mathbb{R}^d)$ . Sabemos que existem os mapas de transporte ótimos  $\mathbf{t}_\sigma^{\mu_k}$  e  $\mathbf{t}_\sigma^{\mu_0}$ . Portanto, temos a identidade

$$\frac{\mathcal{E}_1(t_k, \mu_k) - \mathcal{E}_1(t_0, \mu_k)}{t_k - t_0} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{V(t_k, \mathbf{t}_\sigma^{\mu_k}(x)) - V(t_0, \mathbf{t}_\sigma^{\mu_k}(x))}{t_k - t_0} d\sigma(x).$$

Logo, usando a desigualdade

$$\frac{V(t_k, \mathbf{t}_\sigma^{\mu_k}(x)) - V(t_0, \mathbf{t}_\sigma^{\mu_k}(x))}{t_k - t_0} + \left| \frac{1}{t_k - t_0} \int_{t_0}^{t_k} \beta(s) ds \right| (1 + |\mathbf{t}_\sigma^{\mu_k}(x)|^2) \geq 0,$$

o Lema de Fatou e o Lema 4.1.1, obtemos (4.1.9) a menos de restrição para uma subsequência.  $\square$

Agora passamos a mostrar que a curva dada pelo Teorema 3.5.3 é solução da equação de Fokker-Planck com potencial dependendo do tempo.

**Teorema 4.1.4.** *Considere o funcional  $\mathcal{E}_1$  com  $\kappa \geq 0$  definido em (4.1.1) com potencial  $V$  satisfazendo (V1)-(V3) e as hipóteses da Proposição 4.1.3. Então, dado  $\mu_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ , a curva  $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  dada pelo Teorema 3.5.3 é uma solução no sentido de distribuições da equação de Fokker-Planck*

$$\partial_t \rho = \kappa \Delta \rho + \nabla \cdot (\nabla V(t, x) \rho), \quad (4.1.11)$$

com  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mu(t) = \mu_0$  na métrica de Wasserstein. Se  $\kappa > 0$ , então  $\mu_t = \mu(t)$  é uma medida absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue, i.e.  $d\mu_t(x) = \rho(t, x)dx$ , e  $\rho(t, \cdot) \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ . Também,  $\mu_t$  satisfaz a identidade de energia

$$\mathcal{E}_1(s, \mu(s)) = \mathcal{E}_1(t, \mu(t)) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} (|\Psi_1(r, t)|^2 - \partial_t V(r, x)) d\mu_r(x) dr \quad (4.1.12)$$

para  $s < t$ , onde  $\Psi_1 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é um campo vetorial satisfazendo a identidade

$$\rho(t, x) \Psi_1(t, x) = \kappa \nabla \rho(t, x) + \rho(t, x) \nabla_x V(t, x), \quad \text{para } \kappa > 0, \quad (4.1.13)$$

e  $\Psi_1 = \partial^\circ V(t, x)$  para  $\kappa = 0$ . Além disso, se a função  $\lambda$  é contínua e  $\mu^1, \mu^2$  são duas soluções, temos a seguinte propriedade de contração

$$\mathbf{d}_2(\mu^1(t), \mu^2(t)) \leq e^{-\int_s^t \lambda(r) dr} \mathbf{d}_2(\mu^1(s), \mu^2(s)). \quad (4.1.14)$$



*Demonstração.* Sabemos pelo Teorema 1.2.2 que a curva associada ao funcional  $\mathcal{E}_1$  dada pelo Teorema 3.5.3 satisfaz a equação de continuidade

$$\partial_t \mu_t + \nabla \cdot (\Psi_1(t, x) \mu_t) = 0,$$

para um certo campo  $\Psi_1 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  que podemos assumir que satisfaz  $\|\Psi(t, \cdot)\|_{L^2(\mu_t)} = |\mu'_t|$ , onde  $|\mu'_t|$  denota a derivada métrica da curva em relação à métrica de Wasserstein. Vamos caracterizar tal campo. De fato, lembre que pelo Teorema 3.6.4, a função  $t \rightarrow \mathcal{E}_1(t, \mu_t)$  é localmente absolutamente contínua em  $[0, \infty)$ . Seja  $t$  um ponto de diferenciabilidade de tal função e de  $V(\cdot, x)$ . Considerando uma sequência  $t_k \rightarrow t$ , então

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_1(t_k, \mu(t_k)) - \mathcal{E}_1(t, \mu(t))}{t_k - t} &= \frac{\mathcal{E}_1(t, \mu(t_k)) - \mathcal{E}_1(t, \mu(t))}{t_k - t} \\ &+ \frac{\mathcal{V}(t_k, \mu(t_k)) - \mathcal{V}(t, \mu(t_k))}{t_k - t}. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Em vista da Proposição 4.1.3 também sabemos que é válida a identidade de energia (3.6.6) e, portanto, a menos de subsequência, podemos assumir que o

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{V}(t_k, \mu(t_k)) - \mathcal{V}(t, \mu(t_k))}{t_k - t}$$

existe. Mais ainda, a demonstração da identidade de energia no Teorema 3.6.4 implica que tal limite é igual a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) d\mu_t.$$

Deste modo, ainda a menos de subsequência, podemos assumir que o limite da primeira parcela do lado direito de (4.1.15) existe quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo, pela regra da cadeia para funcionais no espaço de Wasserstein, dada no Teorema 1.3.7, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_1(t, \mu(t_k)) - \mathcal{E}_1(t, \mu(t))}{t_k - t} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle (\partial^\circ \mathcal{E}_1(t))(\mu_t), \Psi_1 \rangle d\mu_t,$$

onde  $\partial^\circ \mathcal{E}_1(t)$  denota o elemento de norma minimal na subdiferencial do funcional  $\mathcal{E}_1(t, \cdot)$ . Contudo, concluímos de (4.1.15) que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_1(t, \mu_t) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle (\partial^\circ \mathcal{E}_1(t))(\mu_t), \Psi_1 \rangle d\mu_t + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) d\mu_t. \quad (4.1.16)$$

Pela identidade de energia (3.6.6) e o fato de que  $\|(\partial^\circ \mathcal{E}_1(t))(\mu_t)\|_{L^2(\mu_t)} = |\partial \mathcal{E}_1(t)|(\mu_t)$ , concluímos imediatamente que

$$(\partial^\circ \mathcal{E}_1(t))(\mu_t) = -\Psi_1(t, x).$$

Assim, obtemos (4.1.12). Pela caracterização de  $(\partial^\circ \mathcal{E}_1(t))(\mu_t)$  dada no Teorema 1.3.5 (ii),

obtemos imediatamente (4.1.11) no sentido distribucional e o campo  $\Psi_1$  satisfaz (4.1.13). O caso  $\kappa = 0$  é uma consequência da caracterização de  $\partial^\circ \mathcal{V}$  dada na seção 1.3 (veja pag. 26).  $\square$

## 4.2 Equação de agregação com interação dependendo do tempo

Nesta seção, consideramos o seguinte funcional

$$\mathcal{E}_2(t, \mu) = \mathcal{W}(t, \mu), \quad (4.2.1)$$

onde  $\mathcal{W}$  é o funcional energia de interação definido em (4.0.2). A seguir, damos as condições a serem satisfeitas pelo potencial de interação  $W$ . Precisamente, assuma que

**W1.-** Para cada  $t \geq 0$  fixo, o potencial de interação  $W(t, x, y)$  é simétrico e, para  $t = 0$ , este potencial satisfaz uma condição de crescimento quadrático, a saber  $W(t, x, y) = W(t, y, x)$  e  $W(0, x, y) \leq C(1 + |x|^2 + |y|^2)$ .

**W2.-** Para cada  $t \geq 0$ ,  $W(t, \cdot)$  é  $\lambda(t)$ -convexa, onde  $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função em  $L_{loc}^\infty([0, \infty))$ . Denote por  $\partial^\circ W(t, x, y)$  o elemento de norma minimal na subdiferencial de  $W(t, \cdot)$  no ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . Assumimos que  $|\partial^\circ W(t, 0, 0)|$  é localmente limitada e  $t \rightarrow W(t, 0, 0)$  é localmente limitada inferiormente.

**W3.-** Assuma também que existe uma função  $\beta \in L_{loc}^1([0, +\infty))$  tal que

$$|W(s, x, y) - W(t, x, y)| \leq \int_s^t \beta(r) \, dr (1 + |x|^2 + |y|^2), \text{ para } 0 \leq s < t. \quad (4.2.2)$$

Note que, existe uma pequena diferença entre as suposições para a função  $V$  na seção 4.1 e para o potencial  $W$  desta seção. O motivo para tal diferença é que esta permite aplicar as ferramentas desenvolvidas no artigo [9]. Agora mostramos que as suposições (E1)-(E5) são satisfeitas pelo funcional  $\mathcal{E}_2$ . De fato, desde que a demonstração segue nas mesmas linhas da Proposição 4.1.2, faremos apenas um esboço da prova de tal resultado.

**Proposição 4.2.1.** *Considere o funcional  $\mathcal{E}_2$  definido em (4.2.1) com potencial de interação  $W$  satisfazendo (W1)-(W3). Então, o funcional  $\mathcal{E}_2$  cumpre com as condições (E1)-(E5).*

*Demonstração.* De fato, usando (W1) e (W3) temos a estimativa

$$W(t, x, y) \leq \left( \int_0^t \beta(s) \, ds + C \right) (1 + |x|^2 + |y|^2).$$

Também, usando **(W2)**, podemos chegar ao análogo de (4.1.4), a saber

$$W(t, x, y) \geq -A(t) - B(t)(|x|^2 + |y|^2),$$

onde  $A, B$  são funções localmente limitadas superiormente. Destas desigualdades, conclui-se que  $\mathbf{D}_2 := \text{Dom}(\mathcal{E}_2(t, \cdot)) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ . Mais ainda, pelo crescimento quadrático de  $W(t, \cdot, \cdot)$  para todo  $t \geq 0$ , temos também que  $\mathcal{E}_2(t, \cdot)$  é contínuo com relação à métrica de Wasserstein. Assim, temos **(E1)** e **(E2)** em quanto **(E3)** é uma consequência imediata de **(W3)**. A demonstração de **(E4)** e **(E5)** segue nas mesmas linhas da Proposição 4.1.2.  $\square$

Similarmente temos um resultado de diferenciabilidade para o funcional  $\mathcal{E}_2$ .

**Proposição 4.2.2.** *Assuma que o conjunto de pontos de diferenciabilidade da função  $t \rightarrow W(t, x, y)$  não depende do par  $(x, y)$ , e.g. se tal função é diferenciável. Então, para cada  $\mu \in \mathbf{D}_2 = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ , a função  $t \rightarrow \mathcal{E}_1(t, \mu)$  é diferenciável q.t.p., o conjunto de pontos de diferenciabilidade não depende de  $\mu$  e vale a identidade*

$$\partial_t \mathcal{E}_2(t, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} W(t, x, y) d(\mu \otimes \mu)(x, y), \quad (4.2.3)$$

e a derivada  $\partial_t \mathcal{E}_2(t, \mu)$  é semicontínua superiormente na variável  $\mu$ . Além disso, se o potencial  $W$  satisfaz

$$t_k \rightarrow t_0 \text{ e } (x_k, y_k) \rightarrow (x_0, y_0) \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{W(t_k, x_k, y_k) - W(t_0, x_k, y_k)}{t_k - t_0} \geq \frac{\partial W}{\partial t}(t_0, x_0, y_0), \quad (4.2.4)$$

então, a menos de subsequência, o funcional  $\mathcal{E}_2$  satisfaz a seguinte propriedade,

$$t_k \rightarrow t_0 \text{ e } \mathbf{d}_2(\mu_k, \mu_0) \rightarrow 0 \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_2(t_k, \mu_k) - \mathcal{E}_2(t_0, \mu_k)}{t_k - t_0} \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} W(t, x, y) d\mu_0(x), \quad (4.2.5)$$

nos pontos onde a derivada existe.

Desde que a demonstração deste resultado é similar à prova da Proposição 4.1.3 a omitimos aqui. Deste modo, passamos a enunciar o resultado principal para o funcional de interação que depende do tempo.

**Teorema 4.2.3.** *Considere o funcional  $\mathcal{E}_2$  definido em (4.2.1) com o potencial de interação  $W$  satisfazendo **(W1)**-**(W3)** e as hipóteses da Proposição 4.2.2. Então, dado  $\mu_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ , a curva  $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  dada no Teorema 3.5.3 é uma solução em sentido distribucional da equação de continuidade*

$$\partial_t \mu = \nabla \cdot (\Psi_2(t, x) \mu), \quad (4.2.6)$$

com  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mu(t) = \mu_0$  na métrica de Wasserstein, onde

$$\Psi_2(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(t, x, y) d\mu(y), \quad \mu\text{-q.t.p. em } \mathbb{R}^d, \quad (4.2.7)$$

e  $\eta(t, x, y) = \frac{1}{2}(\eta_1(t, x, y) + \eta_2(t, y, x))$  para alguma seleção mensurável  $(\eta_1, \eta_2) \in \partial W(t, \cdot, \cdot)$ . Além disso,  $\mu$  satisfaz a identidade de energia

$$\mathcal{E}_2(s, \mu(s)) = \mathcal{E}_2(t, \mu(t)) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} (|\Psi_2(r, x)|^2 - \partial_t W(r, x)) d\mu_r(x) dr \quad (4.2.8)$$

para  $s < t$ . Mais ainda, se a função  $\lambda$  é contínua e  $\mu^1, \mu^2$  são duas soluções, temos a propriedade de contração

$$\mathbf{d}_2(\mu^1(t), \mu^2(t)) \leq e^{-\int_s^t \lambda(r) dr} \mathbf{d}_2(\mu^1(s), \mu^2(s)).$$

*Demonstração.* A demonstração deste teorema segue as mesmas linhas do Teorema 4.1.4. Aqui, só esclarecemos que o campo  $\Psi_2$  é da forma (4.2.7), devido à caracterização do elemento de norma minimal na subdiferencial do funcional energia de interação geral dada no teorema 1.3.6 (veja página 29).  $\square$

*Observação 4.2.4.* No caso em que o potencial de interação  $W$  é suave, o suficiente, então a curva dada pelo teorema anterior resolve o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t &= \nabla \cdot (\Psi_2(t, x) \mu_t) \\ \Psi_2(t, x) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_1 W(t, x, y) + \partial_2 W(t, y, x)) d\mu_t(y), \end{cases}$$

onde  $(\partial_1 W(t, x, y), \partial_2 W(t, x, y)) = \nabla W(t, x, y)$  denota o gradiente de  $W$  em relação às variáveis espaciais.

É natural considerar também o funcional

$$\mathcal{E}(t, \mu) = \kappa \mathcal{F}(\mu) + \mathcal{W}(t, \mu), \quad (4.2.9)$$

onde  $\mathcal{F}$  denota o funcional de entropia definido em (4.1.2) e  $\kappa \geq 0$ . De fato, é possível verificar que tal funcional cumpre com as hipóteses **(E1)**-(**E5**) desde que  $W$  cumpra com **(W1)**-(**W3**). Além disso, sob as hipóteses de diferenciabilidade em relação à variável temporal  $t \in [0, \infty)$ , podemos reproduzir o Teorema 4.2.3 para este funcional. Porém, não é conhecida uma caracterização, nem sequer qualitativa, do campo de velocidades aparecendo na equação de continuidade satisfeita pela curva dada pelo Teorema 3.5.3. Mais ainda, como foi pontuado em [9], o problema para caracterizar tal campo de velocidades pode ser mais delicado do que parece. Contudo, é esperado que, sob hipótese de

suavidade, tal curva seja uma solução da equação conhecida como McKean-Vlasov:

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t - \kappa \Delta \mu_t &= \nabla \cdot (\Psi_2(t, x) \mu_t) \\ \Psi_2(t, x) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_1 W(t, x, y) + \partial_2 W(t, y, x)) d\mu_t(y). \end{cases} \quad (4.2.10)$$

### 4.3 Equação de Fokker-Planck com difusão dependendo do tempo

Nesta seção, construímos o fluxo gradiente para o funcional

$$\mathcal{E}_\kappa(t, \mu) = \kappa(t) \mathcal{F}(\mu) + \mathcal{V}(t, \mu), \quad (4.3.1)$$

onde  $\mathcal{F}$  é o funcional de entropia definido em (4.1.2),  $\mathcal{V}$  é o funcional de energia potencial definido em (4.0.1) e  $\kappa : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  é uma função satisfazendo certas condições. Aqui, assumiremos que o potencial  $V$  definindo o funcional  $\mathcal{V}$  satisfaz todas as hipóteses feitas da seção 4.1.

Primeiramente, note que o funcional  $\mathcal{E}_\kappa$  cumpre com as condições **(E1)**, **(E2)**, **(E4)** e **(E5)**. Porém, a condição **(E3)** não é satisfeita e de fato, não é difícil chegar a uma contradição se supormos que tal condição seja válida. Para contornar tal inconveniente, impomos a seguinte condição na função de difusão:

**K.-** Assuma que  $\kappa : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  é uma função localmente absolutamente contínua e não crescente.

Usaremos como substituto da condição **(E3)** o seguinte resultado, onde usamos a notação  $\mathbf{D}_\kappa = \text{Dom}(\mathcal{E}_\kappa(t, \cdot))$ .

**Lema 4.3.1.** *Seja  $0 \leq s < t < \infty$  e assuma a condição **(K)**. Então, para cada  $\mu \in \mathbf{D}_\kappa$ , vale a seguinte estimativa*

$$\mathcal{E}_\kappa(t, \mu) - \mathcal{E}_\kappa(s, \mu) \leq D(\kappa(s) - \kappa(t))(1 + M_2(\mu))^\alpha + \int_s^t \beta(r) dr (1 + M_2(\mu)), \quad (4.3.2)$$

onde  $D > 0$  é uma constante dependendo apenas da dimensão do espaço  $\mathbb{R}^d$  e  $\alpha \in (0, 1)$ .

*Demonstração.* A demonstração deste resultado é uma consequência direta da estimativa (4.1.7) do fato de  $\kappa$  ser não crescente e da condição **(V3)**.  $\square$

O lema a seguir permite uma limitação uniforme da entropia  $\mathcal{F}$  sob certas condições nos argumentos.

**Lema 4.3.2.** *Seja  $(t_i, \mu_i)_{i \in I} \in [0, \infty) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  uma família limitada tal que*

$$\mathcal{E}_\kappa(t_i, \mu_i) \leq C_0,$$

onde  $C_0 \in \mathbb{R}$  é uma constante. Então, temos a limitação

$$|\mathcal{F}(\mu_i)| \leq C_1,$$

para alguma constante  $C_1 > 0$ . Mais ainda, se as constantes de limitação nas hipóteses não dependem da família  $I$ , então  $C_1$  também não depende da família de índices  $I$ .

*Demonstração.* De fato, a estimativa (4.1.6) e o fato de  $t_i \in [0, \infty)$  ser limitado implicam que  $\mathcal{V}(t_i, v_i)$  é limitado inferiormente. Logo, uma vez que  $\kappa$  é uma função contínua e positiva, temos que  $\mathcal{F}(\mu_i)$  é limitada superiormente. Por outro lado, pela estimativa (4.1.7), concluímos que  $\mathcal{F}(\mu_i)$  é limitado inferiormente, pois  $\mu_i$  é uma família limitada, e então segue a conclusão.  $\square$

Agora, damos um roteiro das demonstrações dos resultados do capítulo 3 adaptadas para o contexto atual. Uma vez que a maioria dos argumentos são adaptações do capítulo 3 damos apenas os detalhes das passagens mais relevantes da teoria

*Prova do Lema 3.3.1:* Este lema é válido, nesta situação, pois ele não precisa da condição (E3).

*Prova do Teorema 3.3.3:* Para provar a continuidade da aplicação  $\mathcal{E}_{t,\tau}(\mu)$ , notamos que a prova de

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(\mu_n) \leq \mathcal{E}_{t, \tau}(\mu),$$

quando  $(t_n, \tau_n, \mu_n) \rightarrow (t, \tau, \mu)$  é a mesma. Por outro lado, lembrando que  $v_n$  denota o mínimo do funcional  $\mathbf{E}(t_n, \tau_n, \mu_n; \cdot)$ , temos novamente que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência limitada. Logo, a desigualdade

$$\kappa(t_n)\mathcal{F}(v_n) + \mathcal{V}(t_n, v_n) \leq \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(\mu_n) \leq C$$

é válida para alguma constante  $C > 0$  que não depende de  $n$ . Portanto, voltando para a demonstração do Teorema 3.3.3, podemos usar o Lema 4.3.2 e a estimativa

$$\mathcal{E}_\kappa(t_n, v_n) - \mathcal{E}_\kappa(t, v_n) \leq (\kappa(t_n) - \kappa(t))\mathcal{F}(v_n) + \int_{[t, t_n]} \beta(r) \, dr (1 + M_2(v_n))$$

para obter

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(\mu_n) \geq \mathcal{E}_{t, \tau}(\mu).$$

Isto implica a primeira conclusão do teorema, enquanto a segunda conclusão segue os mesmos passos.

Em seguida esboçamos, uma prova da diferenciabilidade da aproximação de Moreau-Yosida. Para isto, lembre que  $\mu_\tau^{t+\tau}$  denota o único minimizante do funcional  $\mathbf{E}(t+\tau, \tau, \mu; \cdot)$ .

*Prova da Proposição 3.3.5:* Seja  $0 < \tau_0 < \tau < 1 \leq \tau^*/8$ . Então, pelo Lema 4.3.1,

temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{t+\tau_1, \tau_1}(\mu) - \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(\mu) &\leq C(\kappa(t+\tau_0) - \kappa(t+\tau_1))(1 + M_2(\mu_{t+\tau_0}^{\tau_0}))^\alpha \\ &\quad + \int_{t+\tau_0}^{t+\tau_1} \beta(r) dr (1 + M_2(\mu_{t+\tau_0}^{\tau_0})) + \frac{\tau_0 - \tau_1}{2\tau_0\tau_1} \mathbf{d}_2(\mu, \mu_{t+\tau_0}^{\tau_0}).\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{t+\tau_1, \tau_1}(\mu) - \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(\mu) &\geq (\kappa(t+\tau_0) - \kappa(t+\tau_1))\mathcal{F}(\mu_{t+\tau_1}^{\tau_1}) \\ &\quad - \int_{t+\tau_0}^{t+\tau_1} \beta(r) dr (1 + M_2(\mu_{t+\tau_1}^{\tau_1})) + \frac{\tau_0 - \tau_1}{2\tau_0\tau_1} \mathbf{d}_2(\mu, \mu_{t+\tau_1}^{\tau_1}).\end{aligned}$$

Lembre que, por continuidade, a aplicação  $\tau \rightarrow \mu_{t+\tau}^\tau$  é limitada em cada intervalo compacto de  $(0, \tau^*/8]$  e também por continuidade a função  $\tau \rightarrow \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(\mu)$  é localmente limitada. Deste modo, a função  $\tau \rightarrow \mathcal{E}_\kappa(\mu_{t+\tau}^\tau)$  é localmente limitada superiormente. Segue então, do Lema 4.3.2 que  $\mathcal{F}(\mu_{t+\tau}^\tau)$  é localmente limitada em  $(0, \tau^*/8]$ . Contudo, as duas últimas estimativas implicam a continuidade absoluta local da função  $\tau \rightarrow \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(\mu)$  e vale a fórmula

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(\mu) = \kappa'(t+\tau)\mathcal{F}(\mu_{t+\tau}^\tau) + \partial_t \mathcal{V}(t+\tau, \mu_{t+\tau}^\tau) - \frac{\mathbf{d}_2(\mu, \mu_{t+\tau_1}^{\tau_1})}{2\tau^2}. \quad (4.3.3)$$

Finalmente, é fácil conferir que valem

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(\mu) \leq \mathcal{E}_\kappa(t, \mu) \text{ e } \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbf{d}_2(\mu, \mu_{t+\tau}^\tau) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\liminf_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(\mu) &\geq \liminf_{\tau \rightarrow 0} [\kappa(t)\mathcal{F}(\mu_{t+\tau}^\tau) + \mathcal{V}(t, \mu_{t+\tau}^\tau) + (\kappa(t+\tau) - \kappa(t))\mathcal{F}(\mu_{t+\tau}^\tau) \\ &\quad - \int_t^{t+\tau} \beta(r) dr (1 + M_2(\mu_{t+\tau}^\tau))] \\ &\geq \mathcal{E}_\kappa(t, \mu),\end{aligned}$$

onde a última linha segue do Lema 4.3.2 e o fato de  $\mu_{t+\tau}^\tau$  ser limitada para  $\tau > 0$  suficientemente pequeno. Temos mostrado que  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(\mu) = \mathcal{E}_\kappa(t, \mu)$ , donde obtemos imediatamente a identidade (3.3.4).

*Prova do Lema 3.3.8:* Neste caso notamos, pelo Lema 4.3.1, que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n (\mathcal{E}_\kappa(t_\tau^j, U_\tau^{j-1}) - \mathcal{E}_\kappa(t_\tau^j, U_\tau^j)) &\leq \sum_{j=1}^n \left( D(\kappa(t_\tau^j) - \kappa(t_\tau^j)) + \int_{t_\tau^{j-1}}^{t_\tau^j} \beta(s) ds \right) \\ &\quad \times (1 + M_2(U_\tau^{j-1})) + \mathcal{E}_\kappa(0, U_\tau^0) - \mathcal{E}_\kappa(t_\tau^n, U_\tau^n).\end{aligned}$$

Logo, seguindo as estimativas na prova do lema, não é difícil ver que vale

$$M_2(U_\tau^n) \leq A(S, T, \tau^*, \mathcal{E}_\kappa) + 4 \sum_{j=1}^n \beta_j M_2(U_\tau^j)$$

com  $\beta_j = \frac{\tau_j}{\tau^*} + \frac{\tau^*}{2} \left( D(\kappa(t_\tau^j) - \kappa(t_\tau^{j+1})) + \int_{t_\tau^j}^{t_\tau^{j+1}} \beta(s) ds \right)$ , e portanto os mesmo argumentos continuam sendo válidos.

Continuando com a análise, uma relativamente rápida inspeção permite concluir que os resultados da seção 3.4 não utilizam a condição **(E3)** e portanto elas permanecem sendo válidas para o funcional  $\mathcal{E}_\kappa$ . Similarmente, podemos ver que o Lema 3.5.1 permanece válido no nosso contexto. Portanto, agora estaremos focados em estimar o resíduo  $G_{\tau\eta}$  onde usa-se explicitamente a condição **(E3)**.

*Prova da Proposição 3.5.2:* Lembre que o resíduo em questão é definido em (3.4.15). Pois bem, pelo Lema 3.3.8 sabemos que as aplicações  $t \rightarrow \bar{U}_\tau(t)$  e  $t \rightarrow \underline{U}_\tau(t)$  são limitadas, digamos em  $[0, T]$ , por uma constante que não depende da partição  $\tau$ . Agora, usamos novamente o Lema 4.3.2 para concluir que as expressões numéricas  $\mathcal{F}(\bar{U}_\tau(t))$  e  $\mathcal{F}(\underline{U}_\tau(t))$  são limitadas em módulo em  $[0, T]$  por uma constante que não depende da partição  $\tau$ . Assim, veja que

$$\begin{aligned} & \int_{J_\tau^1} (1 - l_\tau(t)) [\kappa(\mathcal{T}_\tau(t)) \wedge \kappa(\mathcal{T}_\eta(t)) - \kappa(\mathcal{T}_\tau(t)) \vee \kappa(\mathcal{T}_\eta(t))] dt \\ & \leq \int_{J_\tau^1} (1 - l_\tau(t)) dt [\kappa(0) - \kappa(\mathcal{T}_\tau(t_\tau^{n_1})) \vee \kappa(\mathcal{T}_\eta(t_\tau^{n_1}))] \\ & \leq (|\tau| + |\eta|)(\kappa(0) - \kappa(t_\eta^{k_1})), \end{aligned}$$

onde  $J_\tau^1$  é um intervalo,  $t_\tau^{n_1}$  e  $t_\eta^{k_1}$  são todos definidos na demonstração da Proposição 3.5.2. Note que, o processo recursivo pode ser repetido e obter uma estimativa do tipo

$$\begin{aligned} & \int_0^T (1 - l_\tau(t)) [\kappa(\mathcal{T}_\tau(t)) \wedge \kappa(\mathcal{T}_\eta(t)) - \kappa(\mathcal{T}_\tau(t)) \vee \kappa(\mathcal{T}_\eta(t))] dt \\ & \leq (|\tau| + |\eta|)(\kappa(0) - \kappa(T + \tau^*)). \end{aligned}$$

Finalmente, lembrando a definição de  $G_{\tau\eta}$  e observando que o funcional  $\mathcal{V}$  não acrescenta maior dificuldade, podemos repetir os mesmos argumentos restantes na demonstração.

Agora que temos recuperados todos os resultados necessários para obter a convergência da solução aproximada  $\bar{U}_\tau$ , o Teorema 3.5.3 segue diretamente. Daqui em diante denotamos por  $\mu_t$  a curva para onde a solução aproximada converge. O próximo passo então, é mostrar a convergência da interpolação de De Giorgi para a curva  $\mu_t$ .

*Prova da Proposição 3.6.2:* Primeiro note que, fixado  $T > 0$ , uma conta direta usando o Lema 4.3.1 dá a estimativa

$$\mathcal{E}_\kappa(t_\tau^n, U_\tau^n) \leq \mathcal{E}_\kappa(t_\tau^{n-1}, U_\tau^{n-1}) + \left( D(\kappa(t_\tau^{n-1}) - \kappa(t_\tau^n)) + \int_{t_\tau^{n-1}}^{t_\tau^n} \beta(s) ds \right) (1 + M_2(U_\tau^{n-1})),$$



para  $n = 1, \dots, N$ , onde  $T \in [t_\tau^{N-1}, t_\tau^N]$ . Logo, usando o Lema 3.3.8 e um procedimento recursivo obtemos

$$\mathcal{E}_\kappa(t_\tau^n, U_\tau^n) \leq \mathcal{E}_\kappa(0, U_\tau^0) + C \left( D\kappa(0) + \int_0^{T+\tau^*} \beta(s) ds \right),$$

para todo  $n = 1, \dots, N$ , isto recupera a estimativa (3.6.2). Similarmente, lembrando a notação  $\tilde{U}_\tau$  para a interpolação de De Giorgi e usando (3.3.1) para  $t \in (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n]$  e  $\delta = t - t_\tau^{n-1}$ , temos

$$\begin{aligned} & M_2(\tilde{U}_\tau(t)) \\ & \leq 2\epsilon \left( \mathcal{E}_\kappa(t, U_\tau^{n-1}) - \mathcal{E}_{t, \tau^*}(\delta_0) \right) + \frac{\epsilon}{\tau^*} M_2(\tilde{U}_\tau(t)) + \delta \frac{M_2(\tilde{U}_\tau(t))}{\epsilon} \\ & \leq 2\epsilon \left( \mathcal{E}_\kappa(t_\tau^{n-1}, U_\tau^{n-1}) + \left( D(\kappa(t_\tau^{n-1}) - \kappa(t)) + \int_{t_\tau^{n-1}}^t \beta(s) ds \right) (1 + M_2(U_\tau^{n-1})) - \mathcal{E}_{t, \tau^*}(\delta_0) \right) \\ & \quad + \frac{\epsilon}{\tau^*} M_2(\tilde{U}_\tau(t)) + \delta \frac{M_2(\tilde{U}_\tau(t))}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Deste modo, tomando  $\epsilon = \frac{\tau^*}{2}$  e lembrando que  $\delta < |\tau| \leq \frac{\tau^*}{8}$ , segue que

$$\frac{M_2(\tilde{U}_\tau(t))}{4} \leq \tau^* \left( \mathcal{E}_\kappa(t_\tau^{n-1}, U_\tau^{n-1}) + \left( D\kappa(0) + \int_{t_\tau^{n-1}}^t \beta(s) ds \right) (1 + M_2(U_\tau^{n-1})) - \mathcal{E}_{t, \tau^*}(\delta_0) \right).$$

Esta última desigualdade implica imediatamente que  $M_2(\tilde{U}_\tau(t))$  é limitada em  $[0, T]$  por uma constante que não depende da partição  $\tau$ . Portanto, o resto da demonstração da Proposição 3.6.2 continua valendo.

*Prova do Teorema 3.6.4:* Neste teorema, onde essencialmente se mostra a identidade de energia, nos limitamos em observar que a condição de “semi-continuidade inferior” (3.6.5) não é satisfeita em geral. Porém, ainda repetindo o argumento de limitação da entropia baseado no Lema 4.3.2, pode-se concluir que a função  $t \rightarrow \mathcal{E}_\kappa(t, \mu_t)$  é localmente absolutamente contínua, onde  $\mu_t$  é a curva limite das soluções aproximadas. Em particular, temos que

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \kappa(t) \mathcal{F}(\mu_t) = \mathcal{E}_\kappa(t_0, \mu_{t_0}) - \liminf_{t \rightarrow t_0} \mathcal{V}(t, \mu_t),$$

A semi-continuidade inferior do funcional  $\mathcal{V}(t, \cdot)$  para cada  $t$  fixo implica

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow t_0} \mathcal{V}(t, \mu_t) & \geq \liminf_{t \rightarrow t_0} \left( \mathcal{V}(t_0, \mu_t) - \int_{[t, t_0]} \beta(s) (1 + M_2(\mu_t)) \right) \\ & \geq \mathcal{V}(t_0, \mu_{t_0}). \end{aligned}$$

Note que  $\liminf_{t \rightarrow t_0} \kappa(t) \mathcal{F}(\mu_t) \geq \kappa(t_0) \mathcal{F}(\mu_{t_0})$ . Isto permite concluir que a função  $t \rightarrow \mathcal{F}(\mu_t)$  é contínua. Usando tal continuidade, pode-se mostrar, pelo menos para a curva  $\mu_t$ ,

que, para uma sequência  $t_k \rightarrow t_0$  que,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_\kappa(t_k, \mu_{t_k}) - \mathcal{E}_\kappa(t_0, \mu_{t_0})}{t_k - t_0} \geq \partial_t \mathcal{E}_\kappa(t_0, \mu_{t_0}). \quad (4.3.4)$$

Com isto concluímos os comentários em relação à identidade de energia e ao Teorema 3.6.4. Agora, resumimos os resultados obtidos para este funcional no seguinte teorema.

**Teorema 4.3.3.** *Seja  $\mathcal{E}_\kappa$  o funcional definido em (4.3.1) com  $\kappa : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  sendo uma função não crescente e absolutamente contínua. Então, dado  $\mu_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ , a curva  $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  construída nas passagens anteriores é formada por medidas de probabilidade absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue, i.e.  $d\mu_t(x) = \rho(t, x)dx$ ,  $\rho(t, \cdot) \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  para cada  $t \in [0, \infty)$ , e  $\rho$  é uma solução distribucional para a equação de Fokker-Planck*

$$\partial_t \rho = \kappa(t) \Delta \rho + \nabla \cdot (\nabla V(t, x) \rho), \quad (4.3.5)$$

com  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mu(t) = \mu_0$  na topologia fraca de medidas. Também,  $\mu_t$  satisfaz a identidade de energia

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(s, \mu(s)) &= \mathcal{E}_1(t, \mu(t)) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} (|\Psi_\kappa(r, t)|^2 - \partial_t V(r, x)) \rho(r, x) \, dx \, dr \\ &\quad - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \kappa'(r) \rho(r, x) \log(\rho(r, x)) \, dx \, dr, \text{ para } s < t, \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

onde  $\Psi_\kappa : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é um campo vetorial satisfazendo a identidade

$$\rho(t, x) \Psi_1(t, x) = \kappa(t) \nabla \rho(t, x) + \rho(t, x) \nabla V(t, x) \text{ para } \mu_t\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^d. \quad (4.3.7)$$

Mais ainda, se a função  $\lambda$  é contínua e  $\mu_1, \mu_2$  são duas curvas associadas ao funcional, então vale a propriedade de contração

$$\mathbf{d}_2(\mu_1(t), \mu_2(t)) \leq e^{-\int_s^t \lambda(s) \, ds} \mathbf{d}_2(\mu_1(s), \mu_2(s)) \text{ para } s < t. \quad (4.3.8)$$

A demonstração deste teorema é similar ao Teorema 4.1.4 tendo em conta as adaptações desenvolvidas nesta seção. Portanto ela será omitida. Finalizamos esta seção, fazendo alguns comentários.

*Observação 4.3.4.* O funcional de entropia foi escolhido como a energia interna pois este representa, provavelmente, um dos exemplos mais importantes do ponto de vista físico e matemático. Sem embargo, um análise dos detalhes permite concluir que os resultados permanecem válidos para funcionais de energia interna mais gerais, com a mesma condição no coeficiente de difusão  $\kappa$ . Obviamente, tais funcionais de energia interna devem cumprir certas condições que permitam adaptar os argumentos antes expostos. Na próxima seção,

generalizamos parcialmente os mesmos resultados para funcionais de energia interna que são dependentes do tempo sem ser necessariamente de variáveis separadas.

Por outro lado, também podemos considerar o funcional dado por

$$\mathcal{E}_\kappa(t, \mu) = \kappa(t)\mathcal{F}(\mu) + \mathcal{W}(t, \mu).$$

Mantendo as hipóteses e notação das seções anteriores, temos que toda a teoria métrica é válida para este funcional. Mesmo assim, para um potencial de interação geral não é fácil saber que tipo de equação específica é satisfeita pela curva construída como fluxo gradiente de tal funcional. No caso em que tal potencial de interação  $W$  é suave o suficiente, pode-se concluir que tal curva é uma solução distribucional da equação de McKean-Vlasov com difusão dependente do tempo:

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t - \kappa(t) \Delta \mu_t &= \nabla \cdot (\Psi_2(t, x) \mu_t) \\ \Psi_2(t, x) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_1 W(t, x, y) + \partial_2 W(t, y, x)) d\mu_t(y). \end{cases} \quad (4.3.9)$$

## 4.4 Funcionais de energia interna mais gerais

Nesta seção, damos os principais argumentos que adaptam os resultados do capítulo 3 para o caso de um funcional de energia interna que depende do tempo  $t$ . De fato, os argumentos expostos aqui são válidos se somarmos qualquer um dos dois funcionais estudados até agora, isto é, o funcional de energia potencial  $\mathcal{V}$  e o funcional de energia de interação  $\mathcal{W}$ . Uma vez que o funcional de entropia com difusão dependente do tempo não satisfaz a condição **(E3)**, é esperado que uma energia interna mais geral também não cumpra tal condição.

Seja  $F : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $F \in C^1((0, \infty) \times (0, \infty))$ . Considere o funcional de energia interna  $\mathcal{F} : [0, \infty) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  definido por

$$\mathcal{F}(t, \mu) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} F(t, \rho(x)) dx, & \text{se } d\mu = \rho dx \\ +\infty, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Agora, damos as condições a serem satisfeitas pela função  $F$  a fim de recuperar, pelo menos parcialmente, os resultados das outras seções. Note que tais condições são generalizações naturais das anteriores para o caso do funcional de entropia e difusão variável. Assuma que:

**F1.-** Existem funções  $a, A : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $a \in L^1_{loc}([0, \infty))$  e  $A \in L^1([0, \infty))$  tais que

$$-A(t)F^+(0, z) \leq \frac{\partial F}{\partial t}(t, z) \leq a(t)F^-(0, z), \quad (4.4.2)$$

para todo  $t, z \in [0, +\infty)$ , e  $F(0, z)$  tem crescimento superlinear no infinito, i.e.

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{F(0, z)}{z} = +\infty.$$

**F2.-** Existe  $\alpha \in (0, 1)$  com  $\alpha > \frac{d}{d+2}$  e constantes positivas  $c_1, c_2 \geq 0$  tais que

$$F(0, z) \geq -c_1 z - c_2 z^\alpha.$$

**F3.-**  $F(0, 0) = 0$ ,  $z \rightarrow F(t, z)$  é convexa e  $z \rightarrow z^d F(t, z^{-d})$  é convexa e não crescente em  $(0, +\infty)$ , para cada  $t > 0$ .

Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\|A\|_1 = \int_0^\infty A(t) dt < 1$  pois, caso contrário, basta substituir  $F$  por  $\frac{F}{\|A\|_1 + 1}$ . Primeiramente, mostramos uma estimativa que será usada continuamente ao longo desta seção e que é uma consequência das condições **(F1)** e **(F2)**. A saber,

$$\begin{aligned} F(t, z) &= \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(r, z) dr + F(0, z) \\ &\geq - \left( \int_0^t A(r) dr \right) F^+(0, z) + F(0, z) \\ &= \left( 1 - \int_0^t A(r) dr \right) F^+(0, z) - F^-(0, z) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

$$\geq -F^-(0, z) \geq -c_1 z - c_2 z^\alpha. \quad (4.4.4)$$

Logo, lembrando que  $\alpha > \frac{d}{d+2}$ , segue de (4.4.4) que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, \mu) &\geq - \left( c_1 + c_2 \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)^\alpha dx \right) \\ &\geq - \left( c_1 + c_2 \left( \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2) \rho(x) dx \right)^\alpha \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} dx \right)^{1-\alpha} \right) \\ &= - (c_1 + c_2 C_\alpha (1 + M_2(\mu))^\alpha). \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Portanto, o funcional definido em (4.4.1) é bem definido em  $[0, +\infty) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  com valores em  $(-\infty, +\infty]$ . Segue também de (4.4.3) que  $F(t, \cdot)$  possui crescimento superlinear no infinito para cada  $t \geq 0$  fixo. Esta propriedade implica que o nosso funcional de energia interna  $\mathcal{F}(t, \cdot)$  é semicontínuo inferiormente com relação à topologia fraca de medidas (veja [19]). Deste modo,  $\mathcal{F}$  verifica a condição **(E1)**.

Agora, seja  $\mu \in \mathcal{P}_{2,ac}(\mathbb{R}^d)$  com  $d\mu = \rho dx$  e  $\mathcal{F}(0, \mu) < \infty$ . Então, por **(F2)** temos

$$F(t, \rho(x)) \leq \left( \int_0^t a(r) dr \right) F^-(0, \rho(x)) + F(0, \rho(x)).$$

Logo, temos que  $\mathcal{F}(t, \mu) < \infty$  para todo  $t > 0$ . Por outro lado, se  $d\mu = \rho dx$  é tal que

$\mathcal{F}(t, \mu) < +\infty$  para um  $t > 0$  fixo, então, substituindo  $z = \rho(x)$  em (4.4.3), obtemos

$$\left(1 - \int_0^t A(r) dr\right) \int_{\mathbb{R}^d} F^+(0, \rho(x)) dx - \int_{\mathbb{R}^d} F^-(0, \rho(x)) dx \leq \mathcal{F}(t, \mu). \quad (4.4.6)$$

Assim, temos de (4.4.6) que  $\mathcal{F}(0, \mu) < \infty$  e, portanto,  $\mathcal{F}$  satisfaz (E2), isto é, o domínio não depende da variável  $t$ . Além disso, note que devido a (F3), também temos  $F(t, 0) = 0$  para cada  $t \geq 0$ .

Daqui em diante usamos anotação  $\mathbf{D} = \text{Dom}(\mathcal{F}(t, \cdot)) \subset \mathcal{P}_{2,ac}(\mathbb{R}^d)$ . Para  $s < t$  e  $\mu \in \mathbf{D}$  com  $d\mu = \rho dx$ , temos que

$$F(t, \rho(x)) - F(s, \rho(x)) \leq \left(\int_s^t a(r) dr\right) (c_1 \rho(x) + c_2 \rho(x)^\alpha).$$

Deste modo, usando (4.4.5) obtemos a estimativa

$$\mathcal{F}(t, \mu) - \mathcal{F}(s, \mu) \leq \left(\int_s^t a(r) dr\right) (c_1 + c_2 C_\alpha (1 + M_2(\mu))), \text{ para todo } 0 \leq s < t. \quad (4.4.7)$$

Agora, a ideia é usar (4.4.7) como um substituto para a condição (E3). Finalmente, note que a condição (E4) segue da estimativa (4.4.5). Com efeito,

$$\mathcal{F}(t, \mu) + \frac{\mathbf{d}_2^2(\mu, \delta_0)}{2\tau^*} \geq -(c_1 + c_2 C_\alpha (1 + M_2(\mu))^\alpha) + \frac{M_2(\mu)}{2\tau^*}.$$

Então, podemos ver que para  $\tau^* > 0$  suficientemente pequeno a expressão do lado direito acima é limitada inferiormente. Mais ainda, note que o  $\tau^*$  é válido para toda  $t \in [0, +\infty)$ . Finalizando este trecho, notamos que (E5) é válido com  $\lambda \equiv 0$ , devido a (F3). De fato, sob estas hipótese é bem conhecido na literatura que o funcional  $\mathcal{F}(t, \cdot)$  é convexo ao longo de geodésicas generalizadas (veja [3, Proposição 9.3.9]). Para uma posterior referencia enunciamos os resultados obtidos até aqui.

**Lema 4.4.1.** *Seja  $F \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty)) \cap C^1((0, +\infty) \times (0, +\infty))$  uma função satisfazendo as condições (F1)-(F3). Então, o funcional de energia interna dependente do tempo  $\mathcal{F}$  definido em (4.4.1) satisfaz as hipótese (E1), (E2), (E4) e (E5) do capítulo 3. Além disso, vale a estimativa (4.4.7).*

Antes de continuar, lembramos a seguinte notação para a aproximação de Moreau-Yosida do funcional:

$$\mathbf{E}(t, \tau, \mu; v) = \mathcal{F}(t, v) + \frac{\mathbf{d}_2^2(\mu, v)}{2\tau},$$

$$\mathcal{E}_{t,\tau}(\mu) = \min_{v \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)} \mathbf{E}(t, \tau, \mu; v).$$

Note que a existência de uma única medida realizando o mínimo na definição de  $\mathcal{E}_{t,\tau}$  é garantida novamente como na seção 4.3. Como de costume denotamos tal minimizador

por  $\mu_\tau^t$ . Para mostrar a continuidade das aplicações  $\mathcal{E}_{t,\tau}(\mu)$  e  $\mu_\tau^t$ , temos a desigualdade

$$\limsup_n \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(\mu_n) \leq \mathcal{E}_{t, \tau}(\mu)$$

assim como a limitação da sequência  $v_n := (\mu_n)_{\tau_n}^{t_n}$ . Agora, notemos que se  $t_n > t$ , então (4.4.7) e (4.4.2) implicam que

$$\begin{aligned} - \int_t^{t_n} A(s) ds \int_{\mathbb{R}^d} F^+(0, v_n(x)) dx &\leq \mathcal{F}(t_n, v_n) - \mathcal{F}(t, v_n) \\ &\leq \int_t^{t_n} a(s) ds (c_1 + c_2 C_\alpha (1 + M_2(v_n))^\alpha), \end{aligned}$$

onde, abusando da notação, temos identificado  $v_n$  com sua densidade. Similarmente, quando  $t_n < t$ , obtemos uma estimativa similar. Usando (4.4.6) e o fato que  $\mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(\mu_n)$  é limitada superiormente, conclui-se que o termo  $\int_{\mathbb{R}^d} F^+(0, v_n(x)) dx$  é limitado e portanto segue que

$$\lim_n \mathcal{F}(t_n, v_n) - \mathcal{F}(t, v_n) = 0.$$

Usando este último limite, pode-se concluir que  $\lim_n \mathcal{E}_{t_n, \tau_n}(\mu_n) = \mathcal{E}_{t, \tau}(\mu)$ . A continuidade de  $\mu_\tau^t$  segue de maneira similar. Note que, temos recuperado o Teorema 3.3.3.

Analisemos a diferenciabilidade do nosso funcional. Note que se  $d\mu = \rho dx \in \mathbf{D}$ , então

$$\mathcal{F}(t_1, \mu) - \mathcal{F}(t_0, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial t}(t, \rho) dt dx.$$

Olhando para (4.4.2) e aplicando o Teorema da convergência dominada, conclui-se que  $t \rightarrow \mathcal{F}(t, \mu)$  é diferenciável para cada  $\mu \in \mathbf{D}$  na interseção dos pontos de Lebesgue das funções  $a, A$  dadas na condição (F1). Além disso, vale a formula

$$\partial_t \mathcal{F}(t, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial t}(t, \rho(x)) dx.$$

Em particular, os pontos de diferenciabilidade não dependem de  $\mu$ .

Agora, tomando  $\tau_0 < \tau_1$  e  $\mu \in \mathbf{D}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{t+\tau_1, \tau_1}(\mu) - \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(\mu) &\leq \mathcal{F}(t + \tau_1, \mu_{\tau_0}^{t+\tau_0}) - \mathcal{F}(t + \tau_0, \mu_{\tau_0}^{t+\tau_0}) \\ &\quad + \frac{\tau_0 - \tau_1}{2\tau_0\tau_1} \mathbf{d}_2^2(\mu, \mu_{\tau_0}^{t+\tau_0}). \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Denotando as respectivas densidades por  $d\mu_\tau^{t+\tau} = \rho_\tau^{t+\tau} dx$ , podemos estimar

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t + \tau_1, \mu_{\tau_0}^{t+\tau_0}) - \mathcal{F}(t + \tau_0, \mu_{\tau_0}^{t+\tau_0}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{t+\tau_0}^{t+\tau_1} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \rho_{\tau_0}^{t+\tau_0}(x)) dr dx \\ &\leq \int_{t+\tau_0}^{t+\tau_1} a(r) dr \int_{\mathbb{R}^d} F^-(0, \rho_{\tau_0}^{t+\tau_0}(x)) dx. \end{aligned}$$

A última integral sobre  $\mathbb{R}^d$  é uniformemente limitada em relação a  $\tau_0$  em conjuntos compactos de  $(0, \tau^*]$ . Trocando os papéis de  $\tau_0$  e  $\tau_1$ , obtemos também

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{t+\tau_1, \tau_1}(\mu) - \mathcal{E}_{t+\tau_0, \tau_0}(\mu) &\geq \mathcal{F}(t + \tau_1, \mu_{\tau_1}^{t+\tau_1}) - \mathcal{F}(t + \tau_0, \mu_{\tau_1}^{t+\tau_1}) \\ &\quad + \frac{\tau_0 - \tau_1}{2\tau_0\tau_1} \mathbf{d}_2^2(\mu, \mu_{\tau_2}^{t+\tau_1}), \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

onde podemos estimar

$$\mathcal{F}(t + \tau_1, \mu_{\tau_1}^{t+\tau_1}) - \mathcal{F}(t + \tau_0, \mu_{\tau_1}^{t+\tau_1}) \geq - \int_{t+\tau_0}^{t+\tau_1} A(r) \, dr \int_{\mathbb{R}^d} F^+(0, \rho_{\tau_1}^{t+\tau_1}) \, dx.$$

Agora, precisamos de uma estimativa para  $\int_{\mathbb{R}^d} F^+(0, \rho_{\tau_1}^{t+\tau_1}(x)) \, dx$ . Substituindo  $t = t + \tau_1$  e  $z = \rho_{\tau_1}^{t+\tau_1}(x)$  em (4.4.3), e depois de integrar, chegamos à expressão

$$(1 - \|A\|_1) \int_{\mathbb{R}^d} F^+(0, \rho_{\tau_1}^{t+\tau_1}(x)) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} F^-(0, \rho_{\tau_1}^{t+\tau_1}(x)) \, dx + \mathcal{E}_{t+\tau_1, \tau_1}(\mu). \quad (4.4.10)$$

O primeiro termo no lado direito de (4.4.10) é limitado localmente em  $(0, \tau^*]$ . Pela continuidade da aplicação  $\tau \rightarrow \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(\mu)$ , o segundo termo tem a mesma propriedade. Portanto, concluímos que a função  $\tau \rightarrow \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(\mu)$  é absolutamente contínua em cada subconjunto compacto de  $(0, \tau^*]$ . Uma conta direta mostra que

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{E}_{t+\tau, \tau}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial r}(t + \tau, \rho_{\tau}^{t+\tau}(x)) \, dx - \frac{\mathbf{d}_2^2(\mu, \mu_{\tau}^{t+\tau})}{2\tau^2}, \quad (4.4.11)$$

para cada ponto de diferenciabilidade  $\tau \in (0, \tau^*]$ . Assim, temos recuperado a Proposição 3.3.5. Continuando com a análise, só comentamos que o Lema 3.3.8 segue os mesmos argumentos que a adaptação feita na seção 4.3 para o funcional de entropia com difusão variável e com o uso da estimativa (4.4.7). Mais ainda, nesta seção assim como na anterior, notamos que todos resultados da seção 3.4 permanecem válidos assim como a estimativa dos resíduos no Lema 3.5.1. Deste modo, aqui novamente só precisamos estimar o termo residual  $G_{\eta\tau}$  definido em (3.4.15). Para isto, note que basta estimar, por exemplo, a expressão

$$G = \int_0^t (1 - l_{\tau}(t)) [\mathcal{F}(\mathcal{T}_{\tau}(t), \underline{U}_{\tau}(t)) - \mathcal{F}(\mathcal{T}_{\eta}(t), \underline{U}_{\tau}(t))] \, dt.$$

Fixe  $T > 0$ . No caso em que  $\mathcal{T}_{\tau}(t) \geq \mathcal{T}_{\eta}(t)$ , note primeiro que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{T}_{\tau}(t), \underline{U}_{\tau}(t)) - \mathcal{F}(\mathcal{T}_{\eta}(t), \underline{U}_{\tau}(t)) &\leq \left( \int_{\mathcal{T}_{\eta}(t)}^{\mathcal{T}_{\tau}(t)} a(r) \, dr \right) \int_{\mathbb{R}^d} F^-(0, \underline{U}_{\tau}(t, x)) \, dx \\ &\leq C(T) \int_{\mathcal{T}_{\eta}(t)}^{\mathcal{T}_{\tau}(t)} a(r) \, dr, \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

onde  $C(T)$  é uma constante que não depende das partições  $\tau, \eta$ . De maneira similar,

quando  $\mathcal{T}_\tau(t) < \mathcal{T}_\eta(t)$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{T}_\tau(t), \underline{U}_\tau(t)) - \mathcal{F}(\mathcal{T}_\eta(t), \underline{U}_\tau(t)) &\leq \left( \int_{\mathcal{T}_\tau(t)}^{\mathcal{T}_\eta(t)} A(r) dr \right) \int_{\mathbb{R}^d} F^+(0, \underline{U}_\tau(t, x)) dx \\ &\leq C(T) \int_{\mathcal{T}_\tau(t)}^{\mathcal{T}_\eta(t)} A(r) dr, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

onde pode-se assumir que  $C(T)$  é a mesma constante da estimativa anterior. Note que na última estimativa, temos usado (4.4.3). Logo,

$$G \leq C(T) \int_0^t (1 - l_\tau(s)) \int_{\mathcal{T}_\eta(s) \wedge \mathcal{T}_\tau(s)}^{\mathcal{T}_\eta(s) \vee \mathcal{T}_\tau(s)} (a(r) + A(r)) dr ds.$$

Daqui para frente, os mesmos argumentos da Proposição 3.5.2 são válidos, recuperando assim tal resultado. Assim, concluímos que existe uma curva  $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  tal que  $\bar{U}_\tau(t) \rightarrow \mu_t = \mu(t)$  uniformemente em intervalos compactos.

A seguir, esboçamos a prova de que a interpolação de De Giorgi também converge para a curva  $\mu_t$ . Seja  $\delta = t - t_\tau^{n-1}$ , para  $t \in (t_\tau^{n-1}, t_\tau^n]$  e  $t \leq T$ . Usando a propriedade de minimizadores de  $\tilde{U}_\tau(t)$  e  $\bar{U}_\tau(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n - \delta}{2\tau_n \delta} \mathbf{d}_2^2(\underline{U}_\tau(t), \tilde{U}_\tau(t)) + \mathcal{F}(t, \tilde{U}_\tau(t)) - \mathcal{F}(t_\tau^n, \tilde{U}_\tau(t)) \\ \leq \frac{\tau_n - \delta}{2\tau_n \delta} \mathbf{d}_2^2(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) + \mathcal{F}(t, \bar{U}_\tau(t)) - \mathcal{F}(t_\tau^n, \bar{U}_\tau(t)), \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n - \delta}{2\tau_n \delta} \mathbf{d}_2^2(\underline{U}_\tau(t), \tilde{U}_\tau(t)) &\leq \frac{\tau_n - \delta}{2\tau_n \delta} \mathbf{d}_2^2(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) \\ &\quad + \int_t^{t_\tau^n} a(r) dr \int_{\mathbb{R}^d} F^-(0, \tilde{U}_\tau(t, x)) dx \\ &\quad + \int_t^{t_\tau^n} A(r) dr \int_{\mathbb{R}^d} F^+(0, \bar{U}_\tau(t, x)) dx. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Agora note que os termos  $\int_{\mathbb{R}^d} F^+(0, \bar{U}_\tau(t, x)) dx$  e  $\int_{\mathbb{R}^d} F^-(0, \tilde{U}_\tau(t, x)) dx$  são estimados localmente, como foi feito até agora (veja estimativa (4.4.10)). Deste modo, obtemos a desigualdade

$$\mathbf{d}_2^2(\underline{U}_\tau(t), \tilde{U}_\tau(t)) \leq \mathbf{d}_2^2(\underline{U}_\tau(t), \bar{U}_\tau(t)) + C(T) |\tau| \frac{t - \mathcal{S}_\tau(t)}{\mathcal{T}_\tau(t) - t} \int_t^{\mathcal{T}_\tau} (a(r) + A(r)) dr.$$

Donde, obtemos a convergência da interpolação de De Giorgi  $\tilde{U}_\tau \rightarrow \mu_t$  no conjunto de pontos de Lebesgue da função  $A(t) + a(t)$ .

Continuando, gostaríamos de obter a identidade de energia análoga a (3.6.6), página 77. De fato, supondo por exemplo que a função  $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \cdot)$  é uma função côncava, para cada



$t \geq 0$  fixo, e a identidade (4.4.11), podemos obter

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, \mu(t)) - \mathcal{F}(s, \mu(s)) &\leq \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial t}(r, \mu(r)) \, dx \, dr - \frac{1}{2} \int_s^t |\mu'|^2(t) \, dr \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_s^t |\partial \mathcal{F}(r)|^2(\mu(r)) \, dr. \end{aligned}$$

Isto corresponde a nossa noção de solução, porém, obter a igualdade na identidade anterior pode ser um tanto delicada e não sabemos se ela é válida em geral. Com efeito, o problema de obter a igualdade em geral, está relacionado com o calculo do limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathcal{F}(t, \mu_t) - \mathcal{F}(t_0, \mu_{t_0})}{t - t_0},$$

o qual após uma mudança de variáveis (veja por exemplo [29, Teorema 4.8(iv)]) pode ser transformado num limite da forma

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{F\left(t, \frac{g(x)}{\det \nabla \mathbf{t}_\sigma^{\mu_t}}\right) - \mathcal{F}\left(t_0, \frac{g(x)}{\det \nabla \mathbf{t}_\sigma^{\mu_{t_0}}}\right)}{t - t_0} \det(\nabla \mathbf{t}_\sigma^{\mu_t}) \, dx,$$

para alguma  $d\sigma = gdx \in \mathcal{P}_{2,ac}(\mathbb{R}^d)$ . Uma vez que o mapa de transporte  $\mathbf{t}_\sigma^{\mu_t}$  é dado pelo gradiente de uma função convexa, segundo o Teorema 1.2.1, podemos identificar o cálculo do limite anterior com um problema de estabilidade para a equação de Monge-Ampere. Até onde sabemos, tais resultados de estabilidade são conhecidos sob hipóteses mais fortes que as que temos em nosso contexto, veja por exemplo [12]. Contudo, ainda é possível mostrar que a curva  $\mu_t$  é solução distribucional de uma certa equação parabólica de tipo não linear e isto é feito no próximo teorema.

**Teorema 4.4.2.** *Considere o funcional de energia interna definida em (4.4.1) e assuma as condições (F1)-(F3). Então, a curva  $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $d\mu_t = \rho(x, t)dx$ , dada pela teoria métrica adaptada nesta seção é uma solução distribucional da equação*

$$\partial_t \rho - \nabla_x \cdot (\nabla_x P(t, \rho(t, x))) = 0, \quad (4.4.16)$$

com condição inicial  $\mu_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  e com  $P = z \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) - F(t, z)$ . Além disso, temos a propriedade de contração

$$\mathbf{d}_2(\mu_t, \nu_t) \leq \mathbf{d}_2(\mu_0, \nu_0).$$

*Demonstração.* Por simplicidade, tomamos um tamanho de passo uniforme  $\tau > 0$ . Considere a partição  $\{0 < \tau < 2\tau < 3\tau < \dots\}$ , e escolha  $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ . Considere também o fluxo  $\Phi_\delta$  associado ao campo  $\xi$ , i.e.

$$(\Phi_\delta)' = \xi(\Phi_\delta). \quad (4.4.17)$$

Então, pela propriedade de minimização de  $U_\tau^n$ , temos que

$$\mathcal{U}(n\tau, U_\delta) + \frac{\mathbf{d}_2^2(U_\tau^{n-1}, U_\delta)}{\tau} - \mathcal{U}(n\tau, U_\tau^n) - \frac{\mathbf{d}_2^2(U_\tau^{n-1}, U_\tau^n)}{\tau} \geq 0, \quad (4.4.18)$$

onde  $U_\delta = \Phi_{\delta\#}U_\tau^n$  é o pushforward de  $U_\tau^n$  via  $\Phi_\delta$ . Então, por argumentos padrões (veja [17]), segue que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}(n\tau, U_\delta) - \mathcal{U}(n\tau, U_\tau^n)}{\delta} = \int_{\mathbb{R}^d} -P(n\tau, U_\tau^n(x)) \operatorname{div} \xi \, dx$$

e

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tau^{-1} \frac{\mathbf{d}_2^2(U_\tau^{n-1}, U_\delta) - \mathbf{d}_2^2(U_\tau^{n-1}, U_\tau^n)}{\delta} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{(x-y)}{\tau} \cdot \xi(y) \, d\gamma(x, y),$$

onde  $\gamma \in \Gamma(U_\tau^{n-1}, U_\tau^n)$  é um plano de transporte ótimo entre  $U_\tau^{n-1}$  e  $U_\tau^n$ . Trocando  $\xi$  por  $-\xi$ , usando a simetria de (4.4.18), tomando o caso particular  $\xi = \nabla \zeta$ , obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{(x-y)}{\tau} \cdot \nabla \zeta(y) \, d\gamma(x, y) - \int_{\mathbb{R}^d} P(n\tau, U_\tau^n(x)) \Delta \zeta \, dx = 0. \quad (4.4.19)$$

Segue da última identidade que  $P(n\tau, U_\tau^n) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$  é uniformemente limitado. Assim, podemos usar a convergência fraca e as estimativas no Lema 3.3.8 para concluir que a curva  $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  resolve a equação (4.4.16) no sentido de distribuições.  $\square$

# Bibliography

- [1] AGUEH, M. et al. Existence of solutions to degenerate parabolic equations via the Monge-Kantorovich theory. *Advances in Differential Equations* 10.3 (2005), pp. 309–360.
- [2] AMBROSIO, L., FUSCO, N. e PALLARA, D. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Vol. 254. Clarendon Press Oxford, 2000.
- [3] AMBROSIO, L., GIGLI, N. e SAVARÉ, G. *Gradient flows: in metric spaces and in the space of probability measures*. Springer, 2006.
- [4] BAKER, G. R., LI, X. e MORLET, A. C. Analytic structure of two 1D-transport equations with nonlocal fluxes. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 91.4 (1996), pp. 349–375.
- [5] BERTOZZI, A. L., CARRILLO, J. A. e LAURENT, T. Blow-up in multidimensional aggregation equations with mildly singular interaction kernels. *Nonlinearity* 22.3 (2009), p. 683.
- [6] BERTOZZI, A. L. e LAURENT, T. Finite-time Blow-up of Solutions of an Aggregation Equation in  $\mathbb{R}^n$ . *Communications in mathematical physics* 274.3 (2007), pp. 717–735.
- [7] CARRILLO, J. A., FERREIRA, L. C. e PRECIOSO, J. C. A mass-transportation approach to a one dimensional fluid mechanics model with nonlocal velocity. *Advances in Mathematics* 231.1 (2012), pp. 306–327.
- [8] CARRILLO, J. A. e SLEPCEV, D. Example of a first order displacement convex functional. *Preprint UAB* (2008).
- [9] CARRILLO, J. A., LISINI, S. e MAININI, E. Gradient flows for non-smooth interaction potentials. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 100 (2014), pp. 122–147.
- [10] CASTRO, A e CÓRDOBA, D. Global existence, singularities and ill-posedness for a nonlocal flux. *Advances in Mathematics* 219.6 (2008), pp. 1916–1936.
- [11] CHAE, D., CÓRDOBA, A., CÓRDOBA, D. e FONTELOS, M. A. Finite time singularities in a 1D model of the quasi-geostrophic equation. *Advances in Mathematics* 194.1 (2005), pp. 203–223.
- [12] DE PHILIPPIS, G. e FIGALLI, A. Second order stability for the Monge–Ampère equation and strong Sobolev convergence of optimal transport maps. *Analysis & PDE* 6.4 (2013), pp. 993–1000.
- [13] EVANS, L. C. e GARIEPY, R. F. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC press, 2015.

- [14] FIGALLI, A. Existence, uniqueness, and regularity of optimal transport maps. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 39.1 (2007), pp. 126–137.
- [15] FOLLAND, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [16] GANGBO, W. e TUDORASCU, A. Weak KAM Theory on the Wasserstein Torus with Multidimensional Underlying Space. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 67.3 (2014), pp. 408–463.
- [17] JORDAN, R., KINDERLEHRER, D. e OTTO, F. The variational formulation of the Fokker–Planck equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 29.1 (1998), pp. 1–17.
- [18] MATTILA, P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability*. 44. Cambridge University Press, 1999.
- [19] MCCANN, R. J. A convexity principle for interacting gases. *Advances in mathematics* 128.1 (1997), pp. 153–179.
- [20] MIELKE, A., ROSSI, R. e SAVARÉ, G. Nonsmooth analysis of doubly nonlinear evolution equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 46.1–2 (2013), pp. 253–310.
- [21] MIELKE, A., ROSSI, R. e SAVARÉ, G. Variational convergence of gradient flows and rate-independent evolutions in metric spaces. *Milan Journal of Mathematics* 80.2 (2012), pp. 381–410.
- [22] MORLET, A. C. Further properties of a continuum of model equations with globally defined flux. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 221.1 (1998), pp. 132–160.
- [23] PETRELLI, L. e TUDORASCU, A. Variational principle for general diffusion problems. *Applied Mathematics and Optimization* 50.3 (2004), pp. 229–257.
- [24] ROSSI, R., MIELKE, A. e SAVARÉ, G. *A metric approach to a class of doubly nonlinear evolution equations and applications*. WIAS, 2007.
- [25] ROSSI, R., MIELKE, A. e SAVARÉ, G. A metric approach to a class of doubly nonlinear evolution equations and applications. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa—Classe di Scienze* 7.1 (2008), pp. 97–169.
- [26] SAFF, E. e TOTIK, V. *Logarithmic potentials with external fields*. Vol. 316. Springer Science & Business Media, 2013.
- [27] VERETENNIKOV, A. Y. “On ergodic measures for McKean–Vlasov stochastic equations”. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004*. Springer, 2006, pp. 471–486.
- [28] VILLANI, C. *Optimal transport: old and new*. Vol. 338. Springer Science & Business Media, 2008.
- [29] VILLANI, C. *Topics in optimal transportation*. 58. American Mathematical Soc., 2003.